代数学 C(コア) NO.1 要約

一学期の目標
$\boxed{\text{群の準同型定理を理解する。}}$

定理 1.1 (**群の準同型定理**). **群** G **から別の群** H **への準同型写像** $\phi : G \to H$ **が与えられたとする。このとき、次が成り立つ。**

(1) ϕ **の像** $\mathrm{Image}\,\phi$ **は** H **の部分群である。**
(2) ϕ **の核** $N = \mathrm{Ker}\,\phi$ **は** G **の部分群である。**
(3) **剰余群** G/N **は** $\mathrm{Image}\,\phi$ **と同型である。**

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ **群の定義を理解する。**

群とは、掛け算 (または足し算) のできる集合のことである。ただし、掛け算には、「ちゃんとした性質」がないといけない。

群の基本例は整数の加法群 $(\mathbb{Z}, +)$ **と有理数の乗法群** $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ **である。どちらも演算 (二つのものから一つのものを計算する規則) が定義されていて、その演算が結合法則を満たす、というところにまず着目して頂きたい。**

定義 1.1 (**群の定義**). **集合** G **が群であるとは、**
(0) **「演算」と呼ばれる写像** $m : G \times G \to G$ **が定義されていて、**
次の条件を満たすときに言う。

(1) **その演算は結合法則を満たす。**

$$m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z)) \quad (\forall x, y, z \in G)$$

(2) G **には単位元 (普通** e **と書かれる) が存在する。すなわち、ある** G **の元** e **があって、**

$$m(e, x) = x, \quad m(x, e) = x \quad (\forall x \in G)$$

がなり立つ。

(3) G **の各元には逆元がある。すなわち、**G **の任意の元** x **に対して、**G **のある元** y **が存在して、**

$$m(x, y) = e, \quad m(y, x) = e$$

がなりたつ。

注意 1.1. **群の定義において、集合** G **を決めただけではどんな演算を考えているのか明確でないので、正確には、組** (G, m) **を群と呼ぶ。**

例 1.1. 次の (G, m) **はそれぞれ群である。**

(1) $G = \mathbb{Z}$, $m(x, y) = x + y$. (**この群のことを (加法) 群** $(\mathbb{Z}, +)$ **と呼ぶ。**)
(2) $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $m(x, y) = xy$. ((**乗法**) **群** $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ **と呼ぶ。**)
(3) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $m(x, y) = xy$.

例 1.2. 次の (G, m) **はそれぞれ群でない。**

(1) $G = \mathbb{N}$, $m(x, y) = x + y$.
(2) $G = \mathbb{Q}$, $m(x, y) = xy$.
(3) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $m(x, y) = x + y$.

• 写像、全射、単射、全単射の復習

写像 $f: X \to Y$ が、

(1) 全射であるとは、どんな Y の元 y を取ってきても、$f(x) = y$ の解 $x \in X$ が存在するときに言う
(2) 単射であるとは、x_1, x_2 が X の異なる二つの元のときには、いつでも $f(x_1) \neq f(x_2)$ がなり立つときに言う。
(3) 全単射であるというのは、全射でかつ単射のときに言う。

写像のことを話すときには始集合 X、終集合 Y を明確にしておくことが大事である。

例 1.3. 数 x に対してその二乗 x^2 を対応させる写像 f を考える。始集合、終集合をいろいろ変えてみることを考えてみよう。

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$　全射でも単射でもない。
(2) $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$　単射であるが全射でない。
(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$　全射であるが単射でない。
(4) $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$　全単射である。

• デカルト積集合の復習

集合 A, B のデカルト積集合 $A \times B$ とは、A の元と B の元との組全体のなす集合である。すなわち、

$$A \times B = \{(a,b); a \in A, \quad b \in B\}$$

例えば、

$$\{0,1,2\} \times \{a,b\} = \{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$$
$$\{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

※レポート問題

次の中から一問を選んで、レポートとして提出しなさい。
(期限：次の講義の終了時まで。)

(I) 適当な数の集合を用いて群の例と群でない例 (演算が定義された集合だが群にはならない例) を一つずつ挙げなさい。(オリジナルであること)
(II) $\mathbb{Z}$ に、演算 m を

$$m(x,y) = x + y + 3$$

で定義する。このとき、$(\mathbb{Z}, m)$ は群であるか、理由をつけて答えなさい。

● http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/kogi に講義の要約 (このプリント) を提供する.