代数学 C(コア) 演習問題 NO.3

今日のテーマ 部分群

群の部分群とは、部分集合であって群になっているもののことです。 ただし、部分群の掛け算はもとの群の掛け算と一致しなければなりません。部分群の正確な定義は次のようになります。

定義 3.1 (部分群の定義)**.** 群 (G,m) が与えられているとします。G の部分集合 H が G の部分群であるとは、次の条件を満たすときに言います。
(0) 掛け算 $m : G\times G \to G$ を $H\times H$ に制限すると、これは H に値を持つ。すなわち、次のような写像が誘導される。

$$m : H \times H \to H$$

(1) (H,m) は 群である。

条件 (0) は次のように言い換えても良い。
$(0')$ h,k を H から任意に取ってくると、いつでも $m(h,k)$ は H の元である。

問題 3.1. 次の集合は整数の加法群 $(\mathbb{Z},+)$ の部分群をなしますか? 理由をつけて答えなさい。

(1) $(1/2)\mathbb{Z}=\{0,1/2,-1/2,1,-1,3/2,-3/2,\dots\}$.
(2) $\{\pm 1\}$.
(3) 0 以上の整数の集合 $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,\dots,\}$.
(4) 7 で割って 1 余る整数全体の集合 $7\mathbb{Z}+1$.
(5) 4 で割り切れる整数全体の集合 $4\mathbb{Z}$.

問題 3.2 (部分群の定義)**.** (10 点) 次の集合は有理数全体のなす加法群 $(\mathbb{Q},+)$ の部分群をなしますか? 理由をつけて答えなさい。

(1) $(1/2)\mathbb{Z}=\{0,1/2,-1/2,1,-1,3/2,-3/2,\dots\}$.
(2) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$.
(3) 7 で割って 1 余る整数全体の集合 $7\mathbb{Z}+1$.
(4) 0 以外の有理数全体が通常の掛け算についてなす群 $(\mathbb{Q}^\times,\times)$.

問題 3.3. $(\mathbb{Z},+)$ の部分群 H が 6 を元として含めば、

(1) 12 も H の元であることを示しなさい。
(2) 108 も H の元であることを示しなさい。
(3) -216 も H の元であることを示しなさい。
(4) 6 の倍数全体 $6\mathbb{Z}$ は H の部分集合であることを示しなさい。

問題 3.4. $(\mathbb{Z},+)$ の部分群 H が 200 と 55 を元として含むということを知っていたとします。このとき。

(1) $55\times 3(=165)$ も H の元であることを示しなさい。
(2) $200-165(=35)$ も H の元であることを示しなさい。
(3) H に確実にはいっているといえる正の整数のうち、最小のものは何ですか？

問題 3.5. 0 以外の有理数のなす乗法群 $(\mathbb{Q}^\times,\times)$ の部分群 H が 2 を元として含んでいたとします。このとき、「H の正の元のうち最小のもの」は存在しないことを示しなさい。

問題 3.6. 整数全体のなす加法群 $G=(\mathbb{Z},+)$ を考えます。

(1) 整数 n を一つ決めると、G の部分集合 $n\mathbb{Z}$ が、

$$n\mathbb{Z} = \{nm; m \in \mathbb{Z}\}$$

によって決まりますが、これは G の部分群であることを示しなさい。

(2) 逆に、G の部分群 H は必ず (1) の形で書けることを示しなさい。(ヒント：H の元のうち、正で、最小なものを n としてみなさい。)

問題 3.7. 実数を成分にもつ 2 次の正則行列の全体は掛け算に関して群をなします。(証明不要) これを普通 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ と書きます。さて、

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$$

を含む $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分群で、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 自身とは異なるものの例を一つあげなさい。

つぎの諸問題は本に載っているかも知れないけれども、それを丸うつしにしても点数は与えません。今回の冒頭に述べた定義 3.1 から出発して以下のの事実が 論理的な飛躍なしに 説明できるかどうかがポイントです。

問題 3.8.

(1) H と K が、ともに群 G の部分群であれば、$H \cap K$ も G の部分群となることを示しなさい。

(2) $\mathbb{Z}$ の部分群 H, K で、$H \cup K$ が $\mathbb{Z}$ の部分群にならない例を一つあげなさい。

問題 3.9. $\mathbb{Z}$ の部分群 $H = m\mathbb{Z}$ と $K = n\mathbb{Z}$ との共通部分 $H \cap K$ を求めなさい。

問題 3.10. H が群 G の部分群であれば、G のどの元 t についても、tHt^{-1} は G の部分群となることを示しなさい。

問題 3.11. 群 G の部分群 H, K について、集合 HK も部分群となるための必要十分条件は、$KH = HK$ が成立することである事を示しなさい。