今日のテーマ **《環の準同型定理の利用法》**

例 7.1 (**準同型定理の基本例** 1). $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ への写像 f を、

$$f([n]_{100}) = [n]_{10} \qquad ([?]_n \text{ は } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ における } ? \text{ の同値類 })$$

で定めると、次のことが分かる。

(1) f は写像としてうまく定義されている。すなわち、f の定義は代表元のとり方によらない。
(2) f は環の準同型である。
(3) f の像は $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ 全体である。
(4) f の核は $10\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ である。

よって、準同型定理により、

$$(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z})/(10\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

が結論される。

例 7.2. 環としての同型 $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{C}$ が存在する。$\mathbb{R}[X]$ から $\mathbb{C}$ への写像 f を、

$$f(p) = p(\sqrt{-1})$$

で定めると、次のことが分かる。

(1) f は写像としてうまく定義されている。
(2) f は環の準同型である。
(3) f の像は $\mathbb{C}$ 全体である。
(4) f の核は $(X^2+1)\mathbb{R}[X]$ である。

よって、準同型定理により、

$$\mathbb{R}[X]/(X^2+1)\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{C}$$

が結論される。

例 7.3 (**準同型定理の応用例１**). $\mathbb{Z}[X]$ から $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ への写像 f を、

$$f(p) = p(\sqrt{14})$$

で定めると、次のことが分かる。

(1) f は写像としてうまく定義されている。すなわち、f の像は $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ からはみ出さない。
(2) f は環の準同型である。
(3) f の像は $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ 全体である。
(4) f の核は $(X^2-14)\mathbb{Z}[X]$ である。

よって、準同型定理により、

$$\mathbb{Z}[X]/(X^2-14)\mathbb{Z}[X] \cong \mathbb{Z}[\sqrt{14}]$$

が結論される。

例 7.4 (**準同型定理の応用例２**). $A \in M_2(\mathbb{C})$ を、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

で定め、$\mathbb{C}[X]$ から $M_2(\mathbb{C})$ への写像 f を、

$$f(p) = p(A)$$

で定めると、次のことが分かる。

(1) f は環の準同型である。

(2) f の像は

$$\mathbb{C}[A]=\mathbb{C}A+\mathbb{C}E=\{kA+lE;k,l\in\mathbb{C}\}=\left\{\begin{pmatrix} k+l & 3k \\ 5k & 7k+l \end{pmatrix};k,l\in\mathbb{C}\right\}$$

である。

(3) f の核は $(X^2-8X-8)\mathbb{C}[X]$ である。

よって、準同型定理により、

$$\mathbb{C}[X]/(X^2-8X-8)\mathbb{C}[X]\cong\mathbb{C}[A](=\mathbb{C}A+\mathbb{C}E)$$

が結論される。

※レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限:次の講義の終了時まで。)

(I) 環としての同型 $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)\mathbb{R}[X]\cong\mathbb{C}$ が存在することを示しなさい。

(II)

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

と置くとき、

(a) $\mathbb{C}[A]\cong\mathbb{C}[X]/(X^2-5X+6)\mathbb{C}[X]$ であることを示しなさい。

(b) $\mathbb{C}[X]/(X^2-5X+6)\mathbb{C}[X]$ の 0 でない零因子を一つあげなさい。

(c) $\mathbb{C}[A]$ の 0 でない零因子を一つあげなさい。