

定義 2.1 (「生成される部分環」).  $R$  を単位元を持つ環とし、 $T$  をその部分集合とする。 $R$  の部分環  $S$  が  $T$  で環として生成されるとは、次の三つの条件が満たされる時にいう。

- (1)  $S$  は  $T$  を部分集合として含む。
- (2)  $S$  は  $R$  の部分環である。
- (3)  $S$  は 1.,2. を満たす最小のものである。

補題 2.1. 単位元を持つ環  $R$  と、その部分集合  $T$  が与えられていたとする。このとき、 $R$  の部分環  $S$  で、 $T$  で環として生成されるものがただ一つ存在する。 $(S$  のことを  $T$  で生成される  $R$  の部分環といい、 $\langle T \rangle_{ring}$  と書く。

注意

「部分環」の定義により、 $\langle T \rangle_{ring}$  は ( $T$  が何であっても) 常に  $R$  の単位元  $1_R$  を元としてもつ。しかし、単位元の存在を意識しておくために、以下では始めから  $T$  には  $R$  の単位元  $1_R$  が入ったものだけを考えることにする。

例 2.1.  $\mathbb{C}$  の部分集合  $T$  と、それによって生成される  $\mathbb{C}$  の部分環  $\langle T \rangle_{ring}$  の例。

- (1)  $T = \{1\} \implies \langle T \rangle_{ring} = \mathbb{Z}.$
- (2)  $T = \{1, \sqrt{-1}\} \implies \langle T \rangle_{ring} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$
- (3)  $T = \{1, \sqrt{2}\} \implies \langle T \rangle_{ring} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$
- (4)  $T = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\} \implies \langle T \rangle_{ring} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$
- (5)  $T = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt[3]{2}\} \implies \langle T \rangle_{ring} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt[3]{2} + \mathbb{Q}\sqrt[3]{4}$

上の補題の証明の途中で、次の補題が必要になるので、ここに掲げておく。

補題 2.2 (「任意個数の部分環の共通部分はまた部分環である。」).  $R$  は環であるとし、 $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は  $R$  の部分環の族であったとする。このとき、

$$S = \bigcap_{\lambda} S_\lambda$$

もまた  $R$  の部分環になる。

実際には、生成される部分環には次のパターンのものがよく使われる。

定義 2.2.  $R$  を環、 $S$  をその部分環とする。 $R$  の元  $r_1, \dots, r_n$  が与えられたとき、 $R$  の部分集合  $S \cup \{r_1, \dots, r_n\}$  で生成される部分環を、 $S[r_1, \dots, r_n]$  と書き、 $S$  上  $\{r_1, \dots, r_n\}$  で生成された環とよぶ。

この記法によれば、上の例の 4.,5. はそれぞれ次のように書ける。

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}, \quad \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt[3]{2} + \mathbb{Q}\sqrt[3]{4}$$

このように、 $S[r_1, \dots, r_n]$  が実際にはどのような元をもつのか決定することも基本的で、重要である。それは通常次の手順で行う。

- (1)  $S[r_1, \dots, r_n]$  の候補  $T$  を探す。

- (2)  $T$  は  $S[r_1, \dots, r_n]$  を部分集合として含むことを証明する。  
 (3)  $T$  は  $R$  の部分集合であることを証明する。  
 (4)  $T$  の元は  $S$  と、 $r_1, \dots, r_n$  から構成し得ることを証明する。言い換えると、 $S \cup \{r_1, \dots, r_n\}$  を部分集合として含む  $R$  の部分環は、必ず  $T$  を含むことを証明する。

定義 2.3.  $R$  は環であるとする。このとき、 $X$  を変数とする  $R$  係数の一変数多項式の全体

$$\left\{ \sum_{i=0}^n a_i X^i; \quad n \in \mathbb{N}, a_i \in R \right\}$$

は環をなす。(足し算、かけ算は通常のもの考える。) この環を  $X$  を変数とする  $R$  上の一変数多項式環という。

定理 2.1.  $X$  を変数とする  $R$  上の一変数多項式環は、 $R$  と、 $X$  とで生成される。

$$\left\{ \sum_{i=0}^n a_i X^i; \quad n \in \mathbb{N}, a_i \in R \right\} = \langle R \cup \{X\} \rangle_{ring} = R[X]$$

(したがって、これからは  $R$  上の一変数多項式環のことを  $R[X]$  と書く。)

注意

代数 I の範囲では他に  $\mathbb{C}[X], \mathbb{Q}[X]$  等が重要になる。(  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$  は全て体である。すなわち積は可換であり、0 以外の各元は逆元を持つ。)

### レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限: 次の講義の終了時まで。)

- (I)  $\mathbb{C}$  の部分環  $S$  が、 $1, \sqrt{2} + \sqrt{5}$  を元として持っているとする。この時、 $2\sqrt{10}, 6\sqrt{2}, 6\sqrt{5}$  も  $S$  の元であることを示しなさい。  
 (II)  $\mathbb{C}$  の、 $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}\}$  で生成される部分環は、

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2} + \mathbb{Z}\sqrt{5} + \mathbb{Z}\sqrt{10}$$

であることを示しなさい。

- (III)  $M_2(\mathbb{R})$  の、 $\{E, A\}$  で生成される部分環を求めなさい。ただし、 $E$  は単位行列、 $A$  は次のような二次行列とします。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$