代数学 III 要約 NO.10

今日のテーマ

$\boxed{\text{ガロア群には十分たくさんの元があること}}$ 以下、この講義では「ガロア拡大」と言えば有限次ガロア拡大を意味することにする。さらに、「体」と言えば有理数体 $\mathbb{Q}$ を部分体として含むようなものをさすことにする。

L が K のガロア拡大であるとき、$\mathrm{Gal}(L/K)$ の元はどのくらいあるのだろうか。

定理 10.1. L が K のガロア拡大のとき、

$$|\,\mathrm{Gal}(L/K)| = [L : K]$$

系 10.1. L が K のガロア拡大のとき、

(1) L の部分体 M で K を含むもの (L と K の中間体) が与えられると、$\mathrm{Gal}(L/M)$ は $\mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群とみなすことができる。

(2) L と K のあいだの二つの中間体 M_1, M_2 が $M_1 \subset M_2$ をみたすならば、

$$\mathrm{Gal}(L/M_1) \supset \mathrm{Gal}(L/M_2)$$

をみたす。

簡単に言えば、拡大 L/K の話を群 $G = \mathrm{Gal}(G/K)$ の話に置き換えられるのである。中間体 M は G の部分群 $H = \mathrm{Gal}(M/K)$ に対応させる。

ガロア群の例を幾つか挙げよう。

例 10.1. $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})$ の元 σ は、$\sigma(\sqrt{2})$ の行き先が $\sqrt{2}$ か $-\sqrt{2}$ であるかによって定まり、

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) \cong C_2 \quad (\text{位数 } 2 \text{ の巡回群})$$

例 10.2. $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q})$ の元 σ は、$\sigma(\sqrt{2})$ と $\sqrt{5}$ の行き先で定まり、

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}) \cong C_2 \times C_2$$

例 10.3. $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$ とする。$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q})$ の元 σ は、$\sigma(\sqrt[3]{2})$ と ω の行き先で定まり、

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}) \cong \mathfrak{S}_3$$

問題 10.1. $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{7})/\mathbb{Q})$ はどのような群になるだろうか。