

今日のテーマ

3次・4次の方程式の解法

$$X^3 - aX^2 + bX - c = 0$$

を解こう。この方程式の根を x_1, x_2, x_3 とする。根が何であるか、具体的に知らないわけだが、その存在は既に知っている。 x_1, x_2, x_3 の持つ性質から逆算して、その解き方を見ようというわけだ。

根と解の違いは何だろうか。解は方程式に代入してみたときの答えである。根は、もっと根本的なもので、

$$() \quad X^3 - aX^2 + bX - c = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

と一次式の積に因数分解したときに現れるものをさす。(したがって、当然、根がだぶる(重根)こともある。「根」というときには厳密には多項式 $X^3 - aX^2 + bX - c$ の根というのが正しい。)

上の式()を展開することにより、いわゆる根と係数の関係

$$x_1 + x_2 + x_3 = a, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b, x_1x_2x_3 = c$$

が得られる。 a, b, c は知っている数だから、 x_1, x_2, x_3 の基本対称式の値を知っているということになる。前回に述べたことにより、 x_1, x_2, x_3 の対称式の値もこれらから(x_1, x_2, x_3 の値を個別に知らなくても)計算できる。

したがって、如何にして便利な対称式を作るか、が大事になる。ラグランジュの分解式

$$r_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3, \quad r_2 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$$

を考えてみよう。(ただし $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$.) これら自体は x_1, x_2, x_3 の対称式ではないが、

補題 8.1. $t_1 = r_1^3 + r_2^3$ と $t_2 = r_1^3 r_2^3$ はともに x_1, x_2, x_3 の対称式である。

このことから、 r_1^3, r_2^3 を二次方程式

$$X^2 - t_1 X + t_2 = 0$$

の二根として計算することができて、あとはその3乗根として r_1, r_2 を計算できる。そこから x_1, x_2, x_3 を出すのは実は一次方程式を解けばよいので簡単である。

4 次方程式の場合を考えよう。(前ページと記号が一部重複するが混乱しないこと) 根を x_1, x_2, x_3, x_4 とおくと、

$$X^4 - aX^3 + bX^2 - cX + d = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4).$$

ここから根と係数の関係が得られ、やはり x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式は a, b, c, d から (x_1, x_2, x_3, x_4 の値を知らなくても) 計算できる。

ラグランジュの分解式として、

$$r_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \quad r_2 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \quad r_3 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

をとる。 r_1^2, r_2^2, r_3^2 の基本対称式

$$s_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad s_2 = r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_3^2 r_1^2, \quad s_3 = r_1^2 r_2^2 r_3^2$$

はそれぞれ x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式になっていることが分かり、したがって a, b, c, d から計算できる。すなわち、 r_1^2, r_2^2, r_3^2 は

$$X^3 - s_1 X^2 + s_2 X - s_3$$

の三根であるから、前段のように巾根を用いて a, b, c, d から計算できる。あとはその平方根を計算すれば、 r_1, r_2, r_3 が計算されて、一次方程式の根として x_1, x_2, x_3, x_4 が計算されるという仕組みである。

問題 8.1. 三次方程式の解法 (前ページ) で、 t_1, t_2 を a, b, c の多項式として実際に書き下しなさい。(ヒント: t_2 は直接やると難しいが、実は $r_1 r_2$ も x_1, x_2, x_3 の対称式であることがわかるので、先ずそれを求めてそれから 3 乗すればよい。)

問題 8.2. 定数 q が与えられたとき、三次の多項式

$$X^3 + 3X - q$$

の根を求める公式を作りなさい。

問題 8.3. 四次方程式の解法で、 s_1, s_2, s_3 を a, b, c, d の多項式として実際に書き下しなさい。(特に難問というほどではないが、計算はかなり面倒である。可能ならば数式処理ソフトなどを活用するとよい。)