代数学 III 要約 NO.6

今日のテーマ

$\boxed{\text{単純拡大の重要性・復習 I}}$

前回までに述べたように、体 K 上一つの代数的な元で生成されるような体 $K(\alpha)$ は、α の最小多項式 $m(X)$ を用いて構成される環 $K[X]/m(X)K[X]$ と同型であり、それを用いて「共役」の概念が確立されることになるわけだが、K に複数の元を付け加えた場合はどうだろうか。次の定理がそれに答える。

定理 6.1. K は有理数体 $\mathbb{Q}$ を部分体に持つような体であるとする。K 上代数的な元 α, β にたいして、

$$K(\alpha, \beta) = K(\alpha + c\beta)$$

を満たすような $c \in K$ が存在する。*(*実は、もっと強く、上の式を満たさないような $c \in K$ は有限個しかないということが言える。*)*

問題 4.1[再掲] について、

$\mathbb{Q}[X]$ の元 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 で、$a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ にたいして $f_1(a) = f_2(a) = f_3(a) = f_4(a) = f_5(a)$ を満たすようなものを見つけなさい。

この問題はやさしいのであるが、誤答が目だったので解説する。

問題 6.1.

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$$

が成り立つことを示しなさい。

問題 6.2. $\mathbb{Q}$ 上代数的な元 α, β で、

$$\mathbb{Q}(\alpha + \beta) \neq \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$$

であるようなものの例を挙げなさい。