代数学 II 要約 NO.10

今日のテーマ

$\boxed{\text{シローの定理 (2)}}$

定理 10.1 (シローの定理). G の位数が $p^a m$ (p は素数、m と p とは互いに素) であるとき、

(1) 位数 p^a の G の部分群が存在する。(これを G の p-シロー群と呼ぶ)
(2) G の p シロー群の個数を n とすると、$n-1$ は p で割り切れる。
(3) G の p-シロー群の一つを P とする。 G の部分群 P_1 の位数が、 p^a の約数である (すなわち、P_1 はそれ自体 p-群であるとすると、
$$xP_1x^{-1} \subset P$$
なる $x \in G$ が存在する。
(4) G の p-シロー群はどれも互いに共役である。

前回は、この定理の (1) の部分を証明したが、少し分かりにくかったかも知れぬ。

まず、定理の主張から説明しておこう。G の位数 n を p で割れるだけ割って、a 回で割れなくなったとする。例えば、 $n = 12$ で $p = 2$ なら、n は p で 2 回割れて、$p^a = 4$ という具合である。このとき、G の部分群で、位数 p^a のものが存在するということである。

例 10.1.

- 位数 12 の群には位数 4 の部分群 (2-シロー群) と 位数 3 の部分群 (3-シロー群) が必ず存在する。
- 位数 $360(= 2^3 \times 3^2 \times 5)$ の群には位数 8 の部分群 (2-シロー群) と 位数 9 の部分群 (3-シロー群)、位数 5 の部分群が必ず存在する。

そのようなシロー群は、どのように見つければよいのか、これが前回の証明であって、

(1) もし G の部分群 G' で、G より真に小さく、なおかつ $|G'|$ が p^a の倍数であるようなものを見つけることができれば、話の対象を G から G' に移すことができる。(G' の部分群は G の部分群でもあるからである。)
(2) G の部分群 G' の例としては、G のいろいろな元 g に対する中心化群 H_g を 考えることができる。g をいろいろとることで、かなりの確率でそのような G' を見つけることができるだろう。
(3) もし不幸にもそのようなものが一つもなかったとするしよう。このときは類等式を利用して、G の中心 $Z(G)$ は p の倍数でなければならないことが分かる。ところが G の中心が大きければ、$Z(G)$ の部分群 Z を適当にとってそれで剰余群を作ること

により G/Z と Z の二つに話を分けてやはり話を位数が $|G|$ より小さな群に帰着させせることができるのである。

最後の部分は、具体的には次のような補題を証明すればよい。

補題 10.1.

(1) 可換群 Z の位数が素数 p で割れるならば、 Z の元 z で、位数がちょうど p のものが存在する。

(2) 群 G の中心 $Z(G)$ の部分群 A は、必ず G の正規部分群である。

問題 10.1. $\mathfrak{S}_4$ の 2-シロー群、3-シロー群の個数はそれぞれいくらか。

問題 10.2. $\mathfrak{S}_5$ の 2-シロー群、 3-シロー群、5-シロー群の個数はそれぞれいくらか。