

今日のテーマ

シローの定理

一般に、有限群 G の部分群 H が与えられたとき、 H の位数は G の位数の約数であった。(ラグランジュの定理)

この逆は正しくない。つまり、 G の位数の約数が与えられても、 G の部分群で、ちょうどその位数のものがあるとは、一般には限らない。しかし、特殊な場合に限っては大丈夫なことがある。

補題 9.1. p -群 P の位数 p^a の任意の約数 p^b ($b \leq a$) にたいして、 P の部分群 P_1 で、位数がちょうど p^b であるものが存在する。

定理 9.1 (シローの定理). G の位数が $p^a m$ (p は素数、 m と p とは互いに素) であるとき、

- (1) 位数 p^a の G の部分群が存在する。(これを G の p -シロー群と呼ぶ)
- (2) G の p -シロー群の個数を n とすると、 $n-1$ は p で割り切れる。
- (3) G の p -シロー群の一つを P とする。 G の部分群 P_1 の位数が、 p^a の約数である(すなわち、 P_1 はそれ自体 p -群であるとすると、

$$xP_1x^{-1} \subset P$$

なる $x \in G$ が存在する。

- (4) G の p -シロー群はどれも互いに共役である。

系 9.1. G の位数が $p^a m$ (p は素数、 m と p とは互いに素) であるとき、任意の自然数 $b \leq a$ に対して、位数 p^b の G の部分群が存在する。

問題 9.1. S_5 の 2-シロー群、3-シロー群の例をそれぞれ一つづつ挙げなさい。