代数学 II 要約 NO.8

今日のテーマ
$\boxed{\text{二つの巡回群の半直積}}$

命題 8.1. 二面体群

$$\mathfrak{D}_n = \langle a, ba^n = e, b^2 = e, bab^{-1}\rangle$$

は C_2 と C_n との半直積である。すなわち、

$$\mathfrak{D}_n = C_2 \ltimes C_n$$

がなりたつ。

このようなタイプの群は他にどのぐらいあるのだろうか。

定義 8.1. 一般に、群 G から G への同型の全体はそれ自身写像の合成を演算として群をなす。これを G の自己同型群と呼び、 $\mathrm{Aut}(G)$ で書き表す。

次の命題は前回の定理の整理 (言い換え) である。

命題 8.2. $G = H \ltimes K$ の「ひねり」を考える。 $h \in H$ を一つ固定して、

$$K \ni k \mapsto {}^h k = hkh^{-1} \in K$$

なる写像を考えると、(これは K が G の正規部分群だからうまく定義されて、)

(1) この写像は K から K への群自己同型すなわち $\mathrm{Aut}(K)$ の元になる。これを ψ_k とかく。
(2) $\Psi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ を $\Psi(k) = \psi_k$ で定義すると、Ψ は群準同型である。

逆に、群 H, K および H から $\mathrm{Aut}(K)$ への群準同型 Ψ が一つ与えられると、それらのデータから G を構成することができる。すなわち、G は、直積 $H \times K$ に次の乗法を導入したもの $H \ltimes_\Psi K$ と同型である。

$$(h_1, k_1) \circ (h_2, k_2) = h_1 h_2 \Psi(h_2^{-1})(k_1) k_2$$

上のように整理しておくと、K が巡回群であるような半直積 $G = H \times K$ を構成する問題は、 C_n の群自己同型がどの程度あるかという問題に帰着される。

定理 8.3. (1) $\mathbb{Z}$ から群 G への群準同型の全体は、G の元の全体と一対一に対応する。
(2) C_n から群 G への群準同型の全体は、

$$\{g \in G; g^n = e\}$$

の元 (つまり、位数が n の約数であるような G の元) と一対一に対応する。

(3) C_n から群 G への群としての同型の全体は、G の位数 n の元の全体と一対一に対応する。

系 8.1.

$\mathrm{Aut}(C_n) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = ($ n と互いに素な数の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ におけるクラスの全体のなす乗法群$)$

系 8.2. m, n が与えられたとき、半直積 $G = C_m \ltimes C_n$ を与えるような「ひねり」を与えることは、

$$\{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; x^m = 1\}$$

の元を一つ与えることと同じである。そして、そのような元 x を与えると、G の生成元と関係式による表示が、

$$\langle b, a; b^m = e, a^n = e, bab^{-1} = a^x \rangle$$

で与えられる。

問題 8.1.

$$G_1 = \langle a, b; a^7 = e, b^3 = e, bab^{-1} = a^4 \rangle$$

の類等式を書き下しなさい。

問題 8.2. 前問の G_1 と、

$$G_2 = \langle a, b; a^7 = e, b^3 = e, bab^{-1} = a^2 \rangle$$

は同型だろうか。理由を述べて答えなさい。(かなり難問である。)