代数学 II 要約 NO.5

今日のテーマ

$\boxed{\text{群の元の共役}}$

群 G には剰余類によるクラス分け以外にも、重要なクラス分けが存在する。その一つが共役類によるクラス分けである。

定義 5.1. 群 G の元 g_1 と g_2 とが G のなかで共役であるとは、ある $x \in G$ があって、$xg_1x^{-1} = g_2$ が成り立つときにいう。

剰余類によるクラス分けと違って、今度は各クラスの人数はバラバラである。さしあたってすぐ分かるのは

補題 5.1. G の元 z と G のなかで共役なものが z しかない *(*つまり共役類でのクラス分けで一人ぼっちになる*)* には、 z が G の中心元であること *(*すなわち z は G のどの元とも可換であること*)* が必要十分である。

例 5.1. $\mathfrak{S}_3$ をクラス分けすると、

- (1) のクラス (1 名からなるクラス)
- $(1\ 2)$ のクラス (3 名からなるクラス)
- $(1\ 2\ 3)$ のクラス (2 名からなるクラス)

の三つに分かれる。もちろん、全体の人数は 6 であるから、

$$6 = 1 + 3 + 2$$

という等式が成り立つ。このように、共役類のクラス構成員の人数の総和と群の位数とが一致することを表現する式を類等式と呼ぶ。

命題 5.1. 置換 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ が $\mathfrak{S}_n$ のなかで共役なのは、σ の「文字の入れ換え」によって τ が得られるときで、その時に限る。

上の命題は $\mathfrak{S}_n$ のなかでの共役を言っていることに十分注意すること。

問題 5.1. 群 $\mathfrak{S}_4$ の類等式を書きなさい。

問題 5.2. 群 $\mathfrak{A}_4$ ($\{1, 2, 3, 4\}$ の偶置換全体のなす群) の類等式を書きなさい。($\mathfrak{S}_4$ のなかで共役であっても $\mathfrak{A}_4$ の中で共役とは限らないことに十分注意すること。)