代数学 II 要約 NO.2

今日のテーマ

部分群、剰余群、剰余集合、ラグランジュの定理

今回から数回に渡って、復習の意味もこめて群論の初歩をたどってみよう。但し足取りはかなり早い。代数 C や 代数 I の段階では扱わなかったかも知れない複雑な例も扱う場合があるから、注意すること。

まず、先週講義では触れたが要約には書かなかったので、群の定義を書いておく。

定義 2.1. $(G, \circ)$ が群であるとは、

(群 0) 演算 $\circ : G \times G \to G$ は写像である。つまり、G の元二つの組 (g_1, g_2) に対して G の元 $g_1 \circ g_2$ が定まる。
(群 1) G の演算 $\circ$ は結合律をみたす。
(群 2) G には単位元が存在する。
(群 3) G の各元には逆元が存在する。

の条件が満たされるときにいう。

(演算 $\circ$ が何であるか話の流れから了解済みのときには、$\circ$ を書かずに単に G のことを群と呼ぶことも多い。) 群 G の元の個数のことを群の位数と呼び、$|G|$ で書き表す。

群が与えられると、その部分群がどのようなものかを考えるのは基本的である。部分群の定義は簡単で、

定義 2.2. 群 $(G, \circ)$ の部分群とは、G の部分集合 H であって、G の演算 $\circ$ を制限することにより H 自身が群になっているときにいう。

さて、群 G とその部分群 H が定まったとき、剰余集合 G/H が定義される。それは G の「クラス分け」によって定まる。

定義 2.3. G の部分群 H が与えられているとき、G のクラス分けが次のように定まる。

g_1 と g_2 が同じクラス $\Leftrightarrow$ $g_1 = g_2 h$ となる $h \in H$ が存在する。

(1) このクラス分けによる x のクラスを x の H に関する左剰余類と呼ぶ。
(2) このクラス分けによるクラスの全体の集合を G/H と書き、G の H による左剰余集合と呼ぶ

定理 2.1. (1) x の H による左剰余類の全体は

$$xH = \{xh; h \in H\}$$

と等しい。

(2) G が有限群のとき、

$$|G| = |H| \times \#(G/H)$$

(但し、$\#(G/H)$ は集合 G/H の元の個数)

(3) とくに、G が有限群ならば、G の部分群 H の位数 (元の個数) $|H|$ はかならず $|G|$ の約数である。(ラグランジュの定理)

ラグランジュの定理 (と、その特殊な場合として次回に扱うフェルマーの小定理) は、位数が群にとって重要であることをしめす最初の例であろう。

問題 2.1. 群 $G = \mathfrak{S}_4$ の元 a を $a = (1\ 2\ 3\ 4)$ で定め、

$$H = \{(1), a, a^2, a^3\}$$

とおく。このとき G の H によるクラス分けの表を実際に書きなさい。

問題 2.2. 群 $\mathfrak{S}_4$ の部分群 K で、位数が 4 以上 8 以下のものの例 (但し前問の H は当然除く) を一つ見つけだし、その K に対して G の K によるクラス分けの表を実際に書きなさい。