今日のテーマ

$\boxed{\text{方程式系の合同ゼータ関数}}$

以下 p は素数であるとし、 $q = p^s$ (s は正の整数) であるとする。

n 個の変数 $X_1, \dots, X_n$ に関する $\mathbb{F}_q$ 係数の多項式 $f_1, f_2, \dots, f_m$ が与えられているとき、 方程式系

$$\begin{aligned} &f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \\ &f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \\ &f_3(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \\ &\dots, \\ &\dots, \\ &f_m(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \end{aligned}$$

を $V(f_1, \dots, f_m)$ あるいは ($f_1, f_2, \dots, f_m$ がわかりきっている時には) V であらわす。$\mathbb{F}_{q^r}$ での $V(f_1, \dots, f_m)$ の解の全体を $V(f_1, \dots, f_m)(\mathbb{F}_{q^r})$ で書き表す。

定義 10.1. 方程式系 V の合同ゼータ関数を

$$Z(V, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\#V(\mathbb{F}_{q^k})}{k} t^k\right)$$

によって定義する。定義体 $\mathbb{F}_q$ を明示したい時は、 $Z(V/\mathbb{F}_q, t)$ などとも書く。

実際は右辺の級数は収束するのだが、ここでは収束性は気にせずに「形式的べき級数」として扱うことにする。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} = -\log(1-t)$$

にも注意しておこう。

例 10.1. 2 個の変数 X, Y に関する方程式系 $V = V(XY)$ に対して、$Z(V, t) = (1-t)/(1-qt)^2$.

例 10.2. 2 個の変数 X, Y に関する方程式系 $V = V(Y - X^2)$ に対して、$Z(V, t) = 1/(1-qt)$

例 10.3. 2 個の変数 X, Y に関する方程式系 $V = V(YX - 1)$ に対して、$Z(V, t) = (1-t)/(1-qt)$

変数が一つのときは、次の命題によって合同ゼータ関数が求まる。

命題 10.1. f は $\mathbb{F}_q$ 上既約な一変数 d 次多項式であるとする。1 個の変数 X に関する方程式 $V = V(f(X))$ について、

$$Z(V, t) = \frac{1}{1-t^d}$$

が成り立つ。

f が既約でないときはどうか。次の問題を参照のこと。

問題 10.1. q は奇素数の巾であるとする。このとき 1 個の変数 X に関する方程式 $V = V(X^2 - 1)$ に対して、$Z(V/\mathbb{F}_q, t)$ を求めなさい。

問題 10.2. 1 個の変数 X に関する方程式 $V = V(X^3 + 1)$ に対して、$Z(V/\mathbb{F}_5, t)$ を求めなさい。