代数学 I 特論要約 NO.1

今日のテーマ

$\boxed{\text{本講義の目標の説明}}$

体の定義を思い起こそう。基本は、「加減乗除がそのなかでできるような集合」ということであるが、ここではもう少し精密なところまで思い出しておく。

定義 1.1. 集合 K が体であるとは、K に「加法」と呼ばれる演算 $(+)$ と、「乗法」と呼ばれる演算 $(\times)$ が定義されていて、次の性質を満たすときにいう。

(1) K は加法について可換群をなす。(加法に関する単位元を普通 0 と表記する。)
(2) K は乗法について可換半群をなす (つまり、乗法について結合法則と交換法則が成り立つ)。
(3) 分配法則が成り立つ。
(4) K は (乗法に関する) 単位元をもつ。
(5) K の 0 以外の各元は K のなかに (乗法に関する) 逆元をもつ。

補題 1.1. $K_2 = \{\text{偶}, \text{奇}\}$ とおき、K_2 に次のような和と積を導入しよう。

$+$	偶	奇
偶	偶	奇
奇	奇	偶

$\times$	偶	奇
偶	偶	偶
奇	偶	奇

この時 K_2 はこの演算で体であることがわかる。

上の補題で、K_2 の元を 偶、奇 と書いたのは便宜上で、別に a, b でも、ア、イでも、その他何でも構わない。

我々の体 K_2 においては、 $2_{K_2} = 0_{K_2}$、もっと簡単に書くと

$$2 = 0$$

が成り立っている。(それ以外は普通の加法、乗法である。) もっと一般に、ひとつひとつの素数 p にたいして

$$p = 0$$

が成り立つような体 K_p がそれぞれ存在する。このような体についても代数の一般論が展開され、重要な結果がいろいろと知られている。(それらは、CD, DVD, 本の ISBN コード、コンピュータの通信手段、デジタル放送など様々な場所で用いられている。)

本講義ではこれらの体をどう扱うか、そしてどのような結果が知られているかについて講述したい。

問題 1.1. K_2 に対して、分配法則 $a(b + c) = ab + ac$ が成立することを総当たりで示しなさい。