代数学 II 試験略解

問題 14.1. 4 次のヤング図形 $\lambda = \ydiagram{2,1,1}$ について、$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_4]$ の元 $z = S(1\,2)$ が表現 (π_λ, V_λ) 上どのような作用を行うか記述しなさい。

(略解)

$$(\bigstar) \qquad S(12) = (12) + (13) + (23) + (14) + (24) + (34).$$

　これを $\Delta(\ytableaushort{14,2,3}) = \Delta_{123}$ に作用させることを考えればよい。$(\bigstar)$ の右辺の最初の 3 項は Δ_{123} に -1 倍で作用する。あとの 3 項が問題だが、

$$\begin{aligned}
&((14) + (24) + (34)).\Delta_{123} \\
=&((14) + (24) + (34)).(X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_2 - X_3) \\
=&(X_4 - X_2)(X_4 - X_3)(X_2 - X_3) \\
+&(X_1 - X_4)(X_1 - X_3)(X_4 - X_3) \\
+&(X_1 - X_2)(X_1 - X_4)(X_2 - X_4) \\
=&h(X_1, X_2, X_3, X_4) \text{ とおく。}
\end{aligned}$$

とやって、h を計算すればよいわけだ。素直に計算してもよいが、次のように考えると楽になる。命題 9.1 により、z の作用は定数倍であるはずであることが分かっているので、h は当然 Δ_{123} の倍数でなければならないわけである。すなわち、展開すると h は X_4 を含まない式になる。したがって、

$$h(X_1, X_2, X_3, X_4) = h(X_1, X_2, X_3, X_1)$$

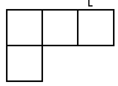
となっているはずであり、右辺はすぐに Δ_{123} と等しいことが確かめられる。

　まとめると、

$$S(12).\Delta_{123} = (-3 + 1)\Delta_{123} = -2\Delta_{123}$$

　すなわち $S(12)$ は V_λ 上 -2 倍として作用する。(命題 9.1 により、V_λ 上 $S(12)$ はスカラーとして作用するから、上のように $\Delta(\ytableaushort{14,2,3})$ への作用を考えるだけで十分であるのだが、納得がいかない人は $\Delta(\ytableaushort{13,2,4})$

等の上の作用を検討してみてもよい。文字の付け替えだけで同じことをしているのが理解できると思う。)

問題 14.2. $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_4]$ の元 $x = (1\ 2)(3\ 4) + (1\ 4)(2\ 3)$ と、4 次のヤング図形 $\lambda =$  に対して、x を π_λ 上で表現した行列 $\pi_\lambda(x)$ の最小多項式を求めなさい。

(略解) V_λ は次のように与えられる。

$$V_\lambda = \mathbb{C} \cdot (X_1 - X_2) + \mathbb{C} \cdot (X_1 - X_3) + \mathbb{C} \cdot (X_1 - X_4).$$

$b_1 = (X_1 - X_2), \quad b_2 = (X_1 - X_3), \quad b_3 = (X_1 - X_4)$ とおくと、

$$\begin{aligned} x.b_1 &= (12)(34).(X_1 - X_2) + (14)(23)(X_1 - X_2) \\ &= X_2 - X_1 + X_4 - X_3 = -b_1 + b_2 - b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x.b_1 &= -b_1 + b_2 - b_3 \\ x.b_2 &= 0 \\ x.b_3 &= -b_1 + b_2 - b_3 \end{aligned}$$

すなわち、V_λ の基底として $\{b_1, b_2, b_3\}$ を採用したときの $\pi_\lambda(x)$ の表現行列は、

$$\pi_\lambda(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。この行列の特性多項式は $T^3 + 2T^2 = T^2(T+2)$. 計算してみると分かるが、最小多項式は $T(T+2)$ である。(本問の x は $\mathbb{D}_8$ の群環の中心元ともみることができ、そうみなせば補題 10.1 を用いることもできる。)

問題 14.3. 複素数体 $\mathbb{C}$ を部分環として含む環 R の元 x の最小多項式が $T^3 - 1$ であるとき、次のような条件を同時に満足する R の元 e_1, e_2, e_3 を x を用いて作りなさい。

(1) $e_1 + e_2 + e_3 = 1$
(2) $e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = e_3$
(3) $e_1 x = x, \quad e_2 x = \omega x, \quad e_3 x = \omega^2 x$

ただし、$\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ (1 の 3 乗根の一つ) とする。

(略解) $T^3 - 1 = (T-1)(T-\omega)(T-\omega^2)$ であり、x をその固有値によって分解しようという問題である。

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{(x-\omega)(x-\omega^2)}{(1-\omega)(1-\omega^2)} = \frac{x^2+x+1}{3} \\
e_2 &= \frac{(x-1)(x-\omega^2)}{(\omega-1)(\omega-\omega^2)} \\
e_3 &= \frac{(x-1)(x-\omega)}{(\omega^2-1)(\omega^2-\omega)}
\end{aligned}
$$

とやればよい。

問題 14.4. 次のような条件を同時に満足する正方行列 A の例を挙げよ。(サイズは問わない) ただし、E は (A と同じサイズの) 単位行列である。

(1) $(A-E)(A^3-E)=0$
(2) A は非自明な 3 次の関係式を満足しない。

(略解) 例えば次のようなものがある。

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \omega & 0 \\
0 & 0 & 0 & \omega^2
\end{pmatrix}
$$

ここに ω は 前問と同じ。ω のような複素数を避けたい場合には、C_3 の表現を思い出しつつ、次のようなものを作ればよい。

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

問題 14.5. $\mathbb{D}_8 = \langle a, b; a^4 = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ の群環 $\mathbb{C}[\mathbb{D}_8]$ の元 $c = (b + a^2 b)$ の ($\mathbb{C}$ 上の) 最小多項式を求めなさい。

(略解)

$$
\begin{aligned}
c &= (1+a^2)b \\
c^2 &= (1+a^2)^2 b^2 = (1+2a^2+1) = 2(1+a^2) \\
c^3 &= 2(1+a^2)(1+a^2)b = 4(1+a^2)b = 4c
\end{aligned}
$$

ゆえに、c は c^3-4c を満たす。c の最小多項式は $T(T^2-4) = T(T-2)(T+2)$ の約数ということになる。 c が 2 次の関係式を満たすのは不

可能であるのが、すぐに確かめられるから、c の最小多項式は、ちょうど $T(T-2)(T+2)$ である。