代数学 II 要約 NO.9

今日のテーマ:

$\boxed{\text{群環の中心を用いて表現を分解する。}}$

今回も表現は $\mathbb{C}$ 上のものを考えることにする。

次の命題は、群の表現が中心元の固有空間を考えることによって分解されることを示している。

命題 9.1. G-加群 V が与えられているとし、$r \in \mathbb{C}[G]$ の V 上の表現行列を $\pi_V(r)$ と書くことにする。 $z \in Z(\mathbb{C}[G])$ にたいして、$\pi_V(z)$ の固有値の一つ λ をとると、$\pi_V(z) - \lambda 1_V$ の核 W は V の G-部分加群になる。とくに、V が既約な G-加群のときには、$\pi_V(z)$ は必ずスカラー行列になる。

例．$\mathfrak{S}_3$ の群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ の中心 $Z(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3])$ は $1, S(1\ 2), S(1\ 2\ 3)$ の線型結合の全体と一致する。その環構造を調べてみよう。

$$S(1\ 2)^2 = 3(1 + S(1\ 2\ 3))$$

$$S(1\ 2)S(1\ 2\ 3) = 2S(1\ 2)$$

$z = S(1\ 2)$ とおくと、

$$z^3 - 9z = 0$$

したがって、$\mathfrak{S}_3$ の表現は、$z = 0$, $z = 3$, $z = -3$ のそれぞれの部分に分解できる。

$\mathfrak{S}_3$ の置換表現は次のように分解される。

$$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \oplus \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}; x + y + z = 0\right\}$$

同様に、$\mathfrak{S}_3$ の正則表現も 3 つの表現 (1 次元が 2 つと 4 次元が 1 つ) の直和に分解される。1 次元の表現は、

$$\frac{1}{3}(z(z+3)) = 1 + S(1\ 2) + S(1\ 2\ 3) \quad (= \sum_{g \in \mathfrak{S}_3} g)$$

で生成されるものと、

$$z^2 - 9 = 3(S(1\ 2\ 3) - 2)$$

で生成されるものである。4 次元のものは実はまだ既約ではない。

問題 9.1. $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_4]$ の元 $z = S(1\ 2)$ にたいして、z^2 を $1, S(1\ 2), S(1\ 2\ 3)$, $S((1\ 2)(3\ 4))$, $S(1\ 2\ 3\ 4)$ の線型結合で書き表せ。

問題 9.2. 4 個の元 $\{1, 2, 3, 4\}$ の偶置換の全体のなす群 (4 次交代群) $\mathfrak{A}_4$ について、その群環の中心 $Z(\mathbb{C}[\mathfrak{A}_4])$ の構造を調べよ。