代数学 II 要約 NO.8

今日のテーマ:

$\boxed{\text{群環の中心}}$

今回も表現は $\mathbb{C}$ 上のものを考えることにする。

G の表現は自然に群環 $\mathbb{C}[G]$-加群と見ることもできた。$\mathbb{C}[G]$ の構造を知ると G-加群の既約分解はかなり見通しがよくなる。

定義 8.1. 環 R の元 r が中心元であるとは、r が R のどの元とも可換であるとき、すなわち、

$$rx = xr \qquad (\forall x \in R)$$

が成り立つときにいう。R の中心元全体の集合を $Z(R)$ と書き、R の中心と呼ぶ。

補題 8.1. 任意の環 R に対して、その中心 $Z(R)$ は可換環をなす。

群環 $\mathbb{C}[G]$ の中心を求めるために、群論の次の事実を思い起こそう。

定義 8.2 (復習)**.** 一般に、群 G の元 g_1 と g_2 とが (G のなかで) 共役であるとは、ある $x \in G$ があって、$xg_1x^{-1} = g_2$ が成り立つときにいう。共役という関係は G の一つの同値関係を与えていて、その同値関係についてのそれぞれのクラスを共役類と呼ぶ。各 $g \in G$ に対して、g と共役なものの全体の集合をここでは $\mathcal{O}(g)$ と書く。

さらに、共役なものについての和

$$\sum_{h \in \mathcal{O}(g)} h$$

のことを、$S(g)$ と書くことにする。(本講義の参考書 (「加群十話」) では [g] と書いてあるが、記号 [$\bullet$] は既に別の意味で用いたため、ここだけ記号を変えてある。)

これまで、群 G の元全体での平均をよく用いてきたが、$S(g)$ は「部分的な平均」である。

補題 8.2. $\mathbb{C}[G]$ の中心 $Z(\mathbb{C}[G])$ は $S(g)$ の一次結合の全体と一致する。

G-加群 (=$\mathbb{C}[G]$ 加群) の分解は、まず $Z(\mathbb{C}[G])$ の固有分解から行うと考えるのが楽になる。これについては次回。

問題 8.1. $\mathfrak{S}_4$ の共役類によるクラス分けを書き、それぞれの類 $\mathcal{O}(g)$ について $S(g)$ をもとめなさい。

問題 8.2. $\mathbb{D}_8$ の共役類によるクラス分けを書き、それぞれの類 $\mathcal{O}(g)$ について $S(g)$ をもとめなさい。