代数学 II 要約 NO.7

今日のテーマ:

$\boxed{G\text{-準同型、シューアの補題}}$ これからは、特に断らない限りは「群 G の表現」といえば複素数体 $\mathbb{C}$ 上のものを考えることにする。

No.6 でも少し述べたように、G-加群の間の G-準同型は次のように定義される。

定義 7.1. G-加群 V_1, V_2 の間の線型写像 $\phi : V_1 \to V_2$ が G-準同型であるとは、ϕ が G の作用を保つ、すなわち任意の $g \in G$ と任意の $v \in V_1$ とに対して、

$$\phi(g.v) = g.\phi(v)$$

が成り立つときに言う。V_1 から V_2 への G-線型写像の全体はそれ自身線型空間になる。これを $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ とかく。

一般に、線型写像の「平均」をとることによって G-準同型を得ることができるわけだが、そもそも G-準同型自体はそんなに多くはない。

定義 7.2. G-加群 V が、非自明な G-部分加群 (0,V 以外の G-部分加群) をもたないとき、V は既約な G-加群であるとよばれる。

マシュケの定理を用いると、次のことが分かる。

補題 7.1 (マシュケの定理の系)**.** *有限群 G の (複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元) 表現 V は、必ず既約な G-加群の直和に分解する。*

定理 7.1 (シューアの補題)**.** *既約な G-加群 V, W に対して、*

(1) $\mathrm{Hom}_G(V, W) \neq 0 \Leftrightarrow V$ と W とは G-加群として同型

(2) $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ は体をなす。

問題 7.1. G-加群 V, W とその間の G-準同型 $\phi : V \to W$ があたえられているとする。つぎの二つのことがらは (シューアの補題の証明のときも含めて) 基本的である。

(1) $\mathrm{Ker}(\phi)$ は V の G-部分加群になる。

(2) $\mathrm{Image}(\phi)$ は W の G-部分加群になる。

これら二つの事実を証明せよ。