代数学 II 要約 NO.6

今日のテーマ:

$\boxed{\text{部分表現、剰余表現、表現の完全可約性}}$

以下、とくに断らない限り、群といえば有限群、ベクトル空間や表現といえば有限次元のものをさすことにする。前回も少し述べたように、次のものは実質的に同じものになる。

- G の表現 $G \to \mathrm{GL}(V)$
- 体 K 上のベクトル空間 V で、その上に G の作用が定まったもの (K 上の G-加群)
- 環 $K[G]$ 上の加群

これらのどの言葉を選ぶかによって、以下の説明の言葉遣いも変わってくるのだが、さしあたっては《G-加群》という言葉遣いを主に使うことにする。(この講義のもう少し後では環論的な立場を重視するために、$K[G]$-加群の言葉を使うことになる。)

定義 6.1. 群 G と、体 K 上の G-加群 V が与えられているとする。V の K-部分ベクトル空間 W が、G-の作用で閉じている、すなわち、

$$g.w \in W \qquad (\forall g \in G, \forall w \in W$$

が成り立つとき、W はそれ自身 G-加群になる。このような W のことを V の G-部分加群とよぶ。

補題 6.1. 体 K 上の G-加群 V と、その部分加群 W とが与えられているとき、剰余ベクトル空間 V/W も 自然に G-加群の構造をもつ。*(V/W のことを V の W による剰余 G-加群とよぶ。)*

定義 6.2. 体 K 上の G-加群 W_1, W_2 があるとき、直和ベクトル空間 $W = W_1 \oplus W_2$ には自然に G-加群の構造が入る。(W を G-加群 W_1, W_2 の直和という。)

定理 6.1 (マシュケの定理)**.** 有限群 G の元 n が、体 K の中で 0 と異なるとき、K 上の G-加群 V とその G-部分加群 W とに対して、ある V の部分加群 W' が存在して、

$$V = W \oplus W'$$

がなりたつ。

マシュケの定理の証明には次の補題が鍵になる。

補題 6.2 (線型写像の「平均」)**.** 有限群 G の元 n が、体 K の中で 0 と異なるとする。体 K 上の G-加群 V_1, V_2 と、K-線型写像 $V_1 \to V_2$

があるとする。このとき、

$$\overline{f} : v \mapsto \frac{1}{n} \sum_{h \in G} h.f(h^{-1}.v)$$

によって定まる V_1 から V_2 への K-線型写像 $\overline{f}$ は、G-加群としての準同型になっている。すなわち、

$$\overline{f}(g.v) = g.(\overline{f}(v))$$

が任意の $g \in G$ に対してなりたつ。

問題 6.1. 位数 $8 = (2 \cdot 4)$ の二面体群 (正方形の合同変換群) $\mathbb{D}_8$ は

$$a = (1\ 2\ 3\ 4), \qquad b = (1\ 4)(2\ 3)$$

で生成される $\mathfrak{S}_4$ の部分群と同一視される。この群 $\mathbb{D}_8$ の置換表現 ($\mathbb{D}_8$ の $\{1, 2, 3, 4\}$ への作用から定まる 4 次元表現) を二つ (以上) の表現の直和に分解せよ。

問題 6.2. 写像の平均は写像の合成と可換であることを示せ。すなわち、K-上の G-加群 V_1, V_2, V_3 があって、$f_1 : V_1 \to V_2$, $f_2 : V_2 \to V_3$ なる K-線型写像が与えられているとき、f_1, f_2 に対して補題のように「平均」$\overline{f_1}, \overline{f_2}$ を定めると、

$$\overline{f_2 \circ f_1} = \overline{f_2} \circ \overline{f_1}$$

が成り立つことを示しなさい。ただし、G の位数 n は K で 0 ではないとする。

問題 6.3 (マシュケの定理の最初の条件はなぜ必要か)**.** 素数 p が与えられたとき、

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

は元の個数が p の体になる。C_p の $\mathbb{F}_p$ 上の 2 次元表現を、

$$\pi(a^k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

によって定めると、この表現は一次元部分表現をもつにもかかわらず、いかなる一次元表現二つの直和にも書き表すことができないこと、すなわちこの表現はマシュケの定理の後半を満たさないことを示しなさい。