代数学 II 要約 NO.2

今日のテーマ:

$\boxed{\text{環の定義の復習・群環の定義}}$

定義 2.1 (環の定義)**.** $(R, +, \times)$ が環であるとは、集合 R に足し算と呼ばれる写像

$$+ : R \times R \to R$$

と掛け算と呼ばれる写像

$$\times : R \times R \to R$$

が定義されていて次の性質を満たす時に言う。

(1) R は足し算に関して可換群をなす。
(2) R の積は結合法則を満たす。
(3) R の足し算と掛け算は分配法則を満たす。
(4) R は積に関して単位元を持つ。

忘れた人は 2 回生の代数学の講義を復習して頂きたい。なお、本講義の参考書

「加群十話」堀田良之著 (朝倉書店)

は (余計なこともかいてあるので読みにくいかも知れないが) 面白く参考になるところも多い。

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ環である。一般に、環 R に対して、R の元を成分にもつ $n \times n$-行列全体のなす集合 $M_n(R)$ も環である。

次のような例もある

例．環 R が与えられているとする。(例えば $R = \mathbb{C}$) R^3 に次のような加法、乗法を定める。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+x \\ q+y \\ r+z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} px+qz+ry \\ py+qx+rz \\ pz+qy+rx \end{pmatrix}$$

このとき、$(R^3, +, *)$ は環である。

問題 2.1. R^3 にベクトルの和 $+$ とベクトル積 $\times$ を

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+x \\ q+y \\ r+z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qz-ry \\ rx-pz \\ py-qx \end{pmatrix}$$

このとき、$(R^3, +, *)$ は環であるといえるだろうか。

いつでも上のような調子でかけ算を決めていたのではたまらない。実は大抵の場合もっと分かりやすい積の定義があり得る。

上の例は実は C_3 の群環と呼ばれるものと同じものになっている。

定義 2.2. 有限群 G と、環 R が与えられているとする。R 上の群環 $R[G]$ とは、形式的な和の集合

$$\{\sum_{g\in G} c_g g; c_g \in R\}$$

に次のような和と積を導入したものである。

$$\sum_{g\in G} c_g g + \sum_{g\in G} d_g g = \sum_{g\in G} (c_g + d_g) g$$

$$(\sum_{g\in G} c_g g)(\sum_{h\in G} d_g g) = \sum_{g,h\in G} (c_g d_h) gh$$

$R[G]$ の乗法は、次のように言った方が洒落ているし、簡潔でもある。

$R[G]$ の乗法は、R-双線形で、R 基底 G のそれぞれに対してはその乗法は G の乗法と一致する。

問題 2.2. $G = \mathfrak{S}_3$ のとき、$R[G]$ の積を例のような R^6 の積として具体的に成分であらわしなさい。