代数学特論 II 要約 NO.14

今日のテーマ:
$\boxed{\text{微分作用素のインデックスの計算}}$
関数環の定義の追加と復習。

定義 14.1. $\mathbb{C}[x]$ は $\mathbb{C}$ に x を追加してできる環、すなわち x についての $\mathbb{C}$ 係数の多項式全体のなす環、$\mathbb{C}[[x]]$ は x の形式的べき級数のなす環であった。$\mathbb{C}[[x]]$ の部分環 $\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ を、

$$\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle = \{f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in \mathbb{C}[[x]]; f \text{ の収束半径は正 } \}$$

で定義し、$\mathbb{C}$ 上の収束べき級数環と呼ぶ。。

インデックスの記号は、関数環 $\mathcal{F}$ を明示して次のように書いておくのがよい。

定義 14.2 (定義 13.2 再掲). $P \in \mathcal{D}$ とする。 $M = \mathcal{D}/\mathcal{D}P$ とおいて、P の $\mathcal{F}$ 上のインデックスを

$$\mathrm{ind}(P; \mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{F})) - \dim(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{F}))$$

で定義する。(但し二つの次元がともに有限次元のとき。)

本講義の参考書「加群十話」にはマルグランジュの定理 (161 ページの定理 10.1) が書いてある。

定理 14.1 (マルグランジュ). $P \in \mathcal{D} = \mathbb{C}[x, \partial_x]$ を $P = \sum_{i=0}^{m} a_i(t)\partial_x^i$ と書いたとき、

(1) $\mathrm{ind}(P, \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle) = m - v(a_m)$
(2) $\mathrm{ind}(P, \mathbb{C}[[x]]) = \max_{0\le i\le m}(i - v(a_i))$

(但し、$v(\bullet)$ は $\bullet$ の零点の位数をあらわす。)

この講義ではこの定理の証明は述べないが、次の例についてインデックスがどうなっているか、述べたい。

例 14.1. $P = x^2\partial - 1$ にたいして、

(1) $\mathrm{ind}(P, \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle) = -1$
(2) $\mathrm{ind}(P, \mathbb{C}[[x]]) = 0$

実際、この例については

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle)) = 0, \quad \dim(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathbb{C}[[x]]) = 0$$

と

$$\dim(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(M, \mathbb{C}[[x]])) = 0$$

はすぐにわかる。

$$\dim(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(M, \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle)) \ne 0$$

がポイントで、これは微分方程式の形式的な解が必ずしも収束しないことと対応している。