# 代数学特論 II 要約 NO.12

今日のテーマ:
$\boxed{\text{生成元と関係式}}$

環 $R$ 上の加群 $M$ が、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ で生成されている (言い換えると、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は $M$ の生成元である) とは、$x_1, \ldots, x_n$ を含むような $M$ の部分 $R$-加群が $M$ 自身であるときにいう。生成元

**補題 12.1.** 環 $R$ 上の加群 $M$ があって、$x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ が与えられているとき、

(1) $R^n$ から $M$ への $R$-準同形写像 $\phi$ が

$$\phi(r_1, r_2, \ldots, r_n) = r_1.x_1 + r_2.x_2 + \cdots + r_n.x_n$$

によって定まる。

(2) $M$ が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ で生成されるための必要十分条件は、上の $\phi$ が全射であることである。

**例 12.1.** $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$-加群であって、基本ベクトル $e_1, e_2, \ldots, e_n$ で生成されている。もちろん、生成元の取り方は他にもいろいろある。

**例 12.2.** $n \times n$ 行列 $A$ が与えられたとき、$V = \mathbb{C}^n$ には $\mathbb{C}[X]$-加群の構造が

$$X.v = Av \qquad (v \in V)$$

から定まったのであった。$V$ は $\mathbb{C}[X]$ 上でももちろん $e_1, e_2, \ldots, e_n$ で生成されているが、もっとよい生成元を探すことが $A$ の「標準型」を得る第一歩であった。

**定義 12.1.** 上の補題の状況で、$N = \mathrm{Ker}(\phi)$ は $R^n$ の $R$-部分加群である。この $N$ のことを $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の関係式のなす加群と呼ぶ。

**例 12.3.** $V = \mathbb{C}^n$ を $\mathbb{C}$-加群とみよう。$V$ の元をいくつかとって $v_1, v_2, \ldots, v_m$ とすると、これらは一般には線型独立とは限らない。

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m = 0$$

なる $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ を集めた集合がこの場合の「関係式のなす加群」である。

**例 12.4.** 例 12.2 のように、$n$ 次の正方行列 $A$ を固定して $V = \mathbb{C}^n$ を $\mathbb{C}[X]$-加群とみよう。$e_1, e_2, \ldots e_n$ の間には $\mathbb{C}[X]$ 上自明でない関係式がたくさんある。それらを実際調べ、スミスの標準型を経由して $A$ のジョルダンの標準型を得ることができるのであった。

$\mathcal{D}$-加群の場合には、関係式の問題は、「$f_1, f_2, \ldots, f_n$ はどのような微分方程式 (系) を満たすか」という問題とみることができる。レポート問題を参照のこと。

**定義 12.2.** ある環 $R$ 上の加群 $M_1, M_2, M_3$ および加群の準同型 $\psi_1 : M_1 \to M_2$ $\psi_2 : M_2 \to M_3$ が与えられているとき、

$$M_1 \xrightarrow{\psi_1} M_2 \xrightarrow{\psi_2} M_3$$

が完全系列 (exact sequence) であるとは、$\mathrm{Image}\,\psi_1 = \mathrm{Ker}\,\psi_2$ が成り立つときにいう。

**問題 12.1.** $\sin(x), \cos(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ (原点でのテイラー展開を考えて) の $\mathcal{D}$- 加群としての関係式の加群を求めよ。