代数学特論 II 要約 NO.11

今日のテーマ:
$\boxed{\text{環と加群の復習・加群の準同型}}$
代数学 II で、次のような議論を展開した。

(あ) 複素数を成分にもつような $n \times n$-行列 A が与えられたとき、$V = \mathbb{C}^n$ への不定元 X の作用を

$$X.v = Av$$

で定めることができる。

他方、微分方程式を扱うときには次のような話が出てくる。

(い) $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$ ないし $\mathbb{C}[[x]]$ 上に、m_x, ∂_x の作用を定めることができる。

(あ) の話では X の作用のみならず、$X^2, X^3, \dots$ およびその和 (複素係数の線型結合)、すなわち X の多項式の作用を考えるのがよいのであった。多項式一つ一つも大事であるけれども、それらを全部残らずまとめて箱に入れたもの (集合) を考えるのが更に有効である。これが多項式環 $\mathbb{C}[X]$ で、これは一種の「道具箱」を考えているようなものである。
同様にして、m_x, ∂_x で生成される環 $\mathcal{D}$ を準備しておいて、$C^\infty(\mathbb{R})$ ないし $\mathbb{C}[[X]]$ を $\mathcal{D}$-加群とみなす。これにより (線型) 微分方程式を環加群の枠組で考えることができるようになる。

定義 11.1 (復習). R (正確には、$(R, +, \times)$) が環 (単位元をもつ結合環) であるとは、次のような条件が満たされるときに言う。

(1) R は加減乗算について閉じている。
(2) $(R, +)$ は加法群である。
(3) 乗法は結合律をみたし、かつ単位元 1 をもつ。
(4) 加法と乗法の間に分配律が成り立つ。

定義 11.2 (復習). R は環であるとする。M が R-加群であるとは、つぎの性質を満たすときに言う。

(1) R の各元 r と、M の各元 m とにたいして、r の m の作用 $r.m \in M$ が定義されている。
(2) $(M, +)$ は加法群である。
(3) $(r_1 r_2).m = r_1.(r_2.m)$, $1.m = m \qquad (r_1, r_2 \in R, \quad m \in M)$
(4) $(r_1 + r_2).m = r_1.m + r_2.m$, $r.(m_1 + m_2) = r.m_1 + r.m_2$ $(r_1, r_2 \in R, \quad m, m_1, m_2 \in M)$

定義 11.3. R-加群 M, N があったとする。M から N への写像 φ が R-準同型であるとは、φ が次の条件を満たすときに言う。

(1) φ は加法を保つ。すなわち、$\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$ が全ての $m_1, m_2 \in M$ に対して成り立つ。
(2) φ は R の作用を保つ。すなわち、$\varphi(r.m) = r.\varphi(m)$ がすべての $r \in R, m \in M$ に対して成り立つ。

R-準同型の定義は、線型写像の定義と瓜二つであることに注意しよう。実際、R が可換体であるときには、上の定義は線型写像の定義そのものである。線型写像の場合と同様に、その核と像を定義することができる。ただし、R が体でない場合、特に非可換環の場合には、R-準同型は線型写像とはかなりおもむきが異なる。例をいくつか挙げよう。

例 11.1. $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}[[x]]$ を $\varphi(P) = P.1$ で定めると、φ は $\mathcal{D}$-準同型である。φ の核 は $\mathcal{D}\partial$ であり、像は $\mathbb{C}[x]$ である。

例 11.2. $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}[[x]]$ を $\varphi(P) = P.x$ で定めると、φ は $\mathcal{D}$-準同型である。φ の核 は $\mathcal{D}\partial^2 + \mathcal{D}(x\partial - 1)$ であり、像は $\mathbb{C}[x]$ である。

例 11.3. $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}[[x]]$ を $\varphi(P) = P.\exp(x)$ で定めると、φ は $\mathcal{D}$-準同型である。φ の核は $\mathcal{D}(\partial - 1)$ であり、像は $\mathbb{C}[x]\exp(x)$ である。

問題 11.1. $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}[[x]]$ を $\varphi(P) = P.\sin(x)$ で定めるとき、φ の核と像を求めよ。