代数学特論 II 要約 NO.8

今日のテーマ:

$\boxed{\text{定数係数微分方程式}}$

今日から後半に入る。

その眼目は「微分方程式を加群の理論から眺めるとどう見えるか」というところにある。

付録として次のものをつけておこう。前々回のレポートででた疑問に答えるものである。ユークリッドの互除法の簡単な復習。

例題 8.1 (ユークリッドの互除法). 等式

$$72l + 56m = 8$$

を満たす整数 l, m の組を一組求めよ。

(解答) まず次のような計算を行なう

$72 \div 56 = 1$ 余り 16	$72 = 56 \times 1 + 16$	$\begin{pmatrix} 72 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 56 \\ 16 \end{pmatrix}$
$56 \div 16 = 3$ 余り 8	$56 = 16 \times 3 + 8$	$\begin{pmatrix} 56 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$
$16 \div 8 = 2$ 余り 0	$16 = 8 \times 2 + 0$	$\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

各々の行の行列算を組み合わせると、

$$\begin{pmatrix} 72 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る。この式の右辺に現れる正方行列はすべて $M_2(\mathbb{Z})$ の元として可逆であることに注意して、上の式を次のように変形することが出来る。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 72 \\ 56 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 72 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 72 \\ 56 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この式の第一行に着目すると、$8 = (-3) \times 72 + 4 \times 56$ を得る。
(答え) $l = -3, m = 4.$