代数学特論 II 要約 NO.5

今日のテーマ:

$\boxed{\text{行列のジョルダン標準型 (まとめ)}}$

n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が与えられているとする。A は

$$V = \mathbb{C}^n = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2 + \mathbb{C}e_3 + \dots \mathbb{C}e_n$$

に作用し、$\mathbb{C}[X]$ の V への作用を

$$X.v = Av \quad (p(X).v = p(A).v)$$

で定義することができる。和とスカラー倍に併せて、X による作用も考えると、(単因子の考え方を用いて) V の生成元と関係式を簡単化することができる。

定理 5.1 (定理 4.1 を再掲). V は $\mathbb{C}[X]$-加群として $\mathbb{C}[X]/d(X)\mathbb{C}[X]$ の形の加群の直和と同型である。

とくに、巾零行列の表現空間は、 $\mathbb{C}[X]/X^k\mathbb{C}[X]$ の形の加群の直和に分解される。

単因子の計算法は、第 3 回に述べたが、その時には比較的単純な行列しか例に挙げなかった。本当は事情はもう少し複雑である。(ユークリッドの互除法が必要になる。) レポート問題を参照のこと。

$\mathbb{C}[X]/d(X)\mathbb{C}[X]$ の部分が気になるかも知れない。この部分は (先週の関数の設計のところにも書いた) $d(X)$ の根による関数の分解をうまく用いる。

命題 5.2. $d_1(X), d_2(X)$ は互いに素な $\mathbb{C}$ 上の多項式であるとする。このとき、$\mathbb{C}[X]$-加群としての同型

$$\mathbb{C}[X]/d_1(X)d_2(X) \cong \mathbb{C}[X]/d_1(X) \oplus \mathbb{C}[X]/d_2(X)$$

が存在する。*(*但し右辺への $\mathbb{C}[X]$ の作用は対角型

$$f.(g,h) = (f.g, f.h)$$

で定まっているものとする。*)*

定理 5.3 (行列のジョルダンの標準型). 任意の行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して、ある正則行列 $P \in M_n(\mathbb{C})$ があって、$B = PAP^{-1}$ は次のような形の行列 *(*ジョルダンブロックと呼ばれる*)* の直和 *(*対角に並んだ形*)* に等しくなる。

$$J_s(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}$$

ここに、s は n 以下の整数、a は複素数 *(*A の固有値の一つ*)* である。B を A のジョルダンの標準型という $J_1(a) = a$ であることにも注意しておこう。A が対角化可能ならば、A を対角化したものが A のジョルダンの標準型である。

ジョルダンブロックの形の行列は $J_s(a) = aE + N_s$ (N_s は巾零行列) の形をしていることにも、特に注意しておこう。とくに、任意の多項式 $p(X)$ にたいして、

$$p(J_s(a)) = \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!} p^{(j)}(a) N_s^j$$

がなりたつ。とくに、$p(J_s(a))$ は p の a での s 階までの微分の値により完全に決まる。A のほうで言えば、A の固有値全体の集合を S とおけば、$p(A)$ は p の S での (多く見積もっても n 階までの) 各階の導関数の値によって完全に決まってしまう。

これは行列を $\exp(X)$ や $\sin(X)$ などの整関数 (全複素平面で正則な関数) やもっと一般に A の固有値の近傍で正則な関数に代入するときのヒントになる。

問題 5.1. $f = X^3 - 8X^2 + 21X - 18$, $g = X^2 - 2X$ のとき、

$$B = \begin{pmatrix} f & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix}$$

にたいして命題 3.1 を満たす P, Q および PBQ を求めなさい。