非可換ケーラー多様体としての非可換射影多様体

Contents

1. 序論

シンプレクティック多様体は非可換な多様体の “影”「古典的対応物」と見られることはよく知られている。他方で、複素数体上の射影多様体はケーラー構造を持ち、とくに (実多様体と見た場合) シンプレクティック多様体でもある。2 つのことの当然の帰結として、複素数体上の射影

多様体を実多様体として眺めたものは、非可換な多様体の "影" であろうと予想される。

講演者のハナシはそのような予想を肯定的に解決しようというものである。

まず第一に、"非可換射影空間" (複素射影空間を実多様体と見たものを影として持つような非可換多様体) を定義する。これはシンプレクティック商と BRST 商の類比を用いるもので、本質的にはよく知られたものである。

つぎに、任意の複素射影多様体に対して、それを実多様体と見たものを影としてもつような非可換多様体を定義する。定義はアッサリと行われるが、その解析はこれからの課題であり、そのうちのいくつかの問題について紹介したい。

2. 準備

2.1. 標数 0 と正標数との往復.

2.1.1. この小節の結果のまとめ. 注意:本 2.1 節の内容は若干マニアックなところを含んでいる。(多分講演者が "超フィルター 中二病" であるせいであろう。) この 2.1.1 節で結果だけ述べるのでここだけを読んで 2.1.4 節にお進み下されば結構かと思われます。

命題 2.1. 素数全体の集合を P とおく。P には離散位相を入れる。さらに、環 $\mathcal{R}$ を

$$\mathcal{R} = \prod_{p \in P} \mathbb{F}_p$$

で定義する。このとき、

(1) $\mathrm{Spec}(\mathcal{R})$ の底空間は P の最大コンパクト化 (=Stone-Čech コンパクト化) $\bar{P}$ と同一視できる。

※以下 $\mathrm{Spec}(\mathcal{R})$ の (アフィンスキームとしての通常の) 構造層を $\mathbb{F}$, その P への制限 $\mathbb{F}|_P$ のことを $\mathcal{F}$ と書くことにする。

(2) P の任意の開集合 S に対して、$\mathbb{F}(S) = \prod_{p \in S} \mathbb{F}_p$. すなわち、$\mathcal{F}$ は "不連続関数 (ただし、値空間は各点 p によって異なり、$\mathbb{F}_p$ と等しい) 全体のなす層" である。

(3) $\mathbb{F}$ の $p \in P$ での stalk は $\mathbb{F}_p$ と同型である。(つまり、"$\mathbb{F}_p$" はもとの $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型な体としての記号と、層 $\mathbb{F}$ の stalk としての記号の 2 つの意味が考えられるが、両者は一致する。)

(4) $j : P \hookrightarrow \bar{P}$ を包含写像とすると、$\mathbb{F} = j_*(\mathcal{F})$.

(5) $\mathcal{U} \in \bar{P} \setminus P$ ならば、$\mathbb{F}_{\mathcal{U}}$ は標数 0 の体である。

命題 2.2. 上の命題で $\mathbb{F}_p$ のところをことごとく $\bar{\mathbb{F}}_p$ ($\mathbb{F}_p$ の代数的閉包) で置き換えることで $\bar{P}$ にはもうひとつの層 $\bar{\mathbb{F}}$ が定義され、上の命題の "$\mathbb{F}$" を "$\bar{\mathbb{F}}$" に置き換えたものが成り立つ。

記号 2.3. 上で、$\prod_{p\in P}\mathbb{F}_p$ のことを $\mathcal{R}$ と書いたが、記号がもったいないし、実物をうまく表しているわけでもない。そこで記号の節約のため、ほとぼりがさめた 2.1.4 節以降は $\prod_{p\in P}\mathbb{F}_p$ のことを $\mathbb{F}(P)$ と書くことにする。同様にして、 $\prod_{p\in P}\bar{F}_p$ のことを $\mathbb{F}(\bar{P})$ と書くことにする。(これは、層論の記号法とマッチしている。)

2.1.2. 不連続関数の層. P 上の環の層 $\mathcal{F}$ を、"不連続関数の全体のなす層"

$$\mathcal{F}(S)=\prod_{p\in S}\mathbb{F}_p$$

により定義するところから出発しよう。制限写像はあえて書かなくても明瞭であろう。さらに、包含写像 $\iota: P\hookrightarrow \bar{P}$ を用いて、$\mathcal{F}$ の P への延長 $\mathbb{F}=\iota_*(\mathcal{F})$ を考える。次のことが分かる:

補題 2.4. (1) $\mathbb{F}$ は $\bar{P}$ 上の環の層である。
(2) $p\in P$ ならば、$\mathbb{F}$ の p での stalk は $\mathbb{F}_p$ と一致する。(つまり、"$\mathbb{F}_p$" はもとの $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型な体としての記号と、層 $\mathbb{F}$ の stalk としての記号の 2 つの意味が考えられるが、両者は一致する。)
(3) $\mathcal{U}\in\bar{P}\setminus P$ ならば、 $\mathbb{F}_{\mathcal{U}}$ は標数 0 の体である。

Proof. $\bar{P}$ の元は P 上の超フィルターと一対一に対応する。上の命題もフィルターの言葉で表現することができる。

とくに、$\bar{P}$ が P の最大コンパクト化であることと関連して、次のことが成り立ち、証明の際に必要になる:

$\mathcal{U}\in\bar{P}\backslash P$ ならば、任意の $S\subset P$ にたいして、$\mathcal{U}\in\bar{S}$ or $\mathcal{U}\in\overline{(P\setminus S)}$. □

2.1.3. $(\bar{P},\mathbb{F})$ はアフィンスキーム.

定義 2.5. 集合 $\bar{P}$ の部分集合 S に対して、$\mathbb{1}_S$ で S の定義関数を表すことにする。すなわち

$$\mathbb{1}_S(p)=\begin{cases}1 & (\text{if } p\in S)\\ 0 & (\text{if } p\notin S)\end{cases}$$

さらに、それの 0 と 1 の反転をしたものを (ここだけの記号だが) $\mathbb{f}_S$ と書くことにする。すなわち、

$$\mathbb{f}_S=1-\mathbb{1}_S=\mathbb{1}_{\complement S}$$

である。

補題 2.6. $\mathcal{R}=\prod_{p\in P}\mathbb{F}_p$ とおく。このとき、
(1) $\mathcal{R}$ のイデアル I に対して $\mathcal{F}_I=\{A\subset P|\mathbb{f}_A\in I\}$ は P のフィルターである。P のフィルターはこのようなものに限る。
(2) $\mathcal{R}$ の素イデアルは P の 超フィルターに対応する。

(3) 上の対応により、 $\bar{P}$ と $\mathrm{Spec}(\mathcal{R})$ との間の全単射が定義される。
(4) $(\bar{P}, \mathbb{F})$ は $\mathrm{Spec}(\mathcal{R})$ と (局所環付き空間として) 同型である。

Proof. 証明は難しくはないので省略するが、具体的には
`http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/TALK/kaehler1/note.pdf`
の 5.2 節の付近のやつのマネをすれば良い。おなじものの 5.1 節も関係あるが、そこからもう一回引用に飛ばされる羽目になる (スミマセン)。
以下にヒントだけもう少し述べておこう。
◎ $\mathcal{R}$ の任意の元 f は

$$f = \mathbb{1}_{\mathrm{Zero}(f)} \cdot \alpha_f$$

という具合に分解される。ただし、$\mathbb{1}_{\mathrm{Zero}(f)}$ は f の零点の台の定義関数、すなわち

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\mathrm{Zero}\,f} =& \begin{cases} 1 & (\text{if } f(x) \neq 0) \\ 0 & (\text{if } f(x) = 0) \end{cases} \\ =& \mathbb{1}_{\{x; f(x)=0\}}\end{aligned}$$

であり、

$$\alpha_f = \begin{cases} f(x) & (\text{if } f(x) \neq 0) \\ 1 & (\text{if } f(x) = 0) \end{cases}$$

である。
◎ 上の分解で、$\alpha_f \in \mathcal{R}^\times$ である。とくに、$\mathcal{R}$ の任意のイデアル I に対して、

$$f \in I \Leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathrm{Zero}(f)} \in I$$

が成り立つ。
◎ P の任意の部分集合 A, B に対して、

$$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$$

が成り立つ。とくに、とくに、$\mathcal{R}$ の任意のイデアル I に対して、

$$\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B \in I \implies \mathbb{1}_{A \cap B} \in I$$

が成り立つ。 □

なお、$\prod_{p \in P} \bar{\mathbb{F}}_p$ についても上の補題と同様の結果が成り立つ。

2.1.4. この節の結果の応用. $\mathbb{Z}$ 上定義された代数多様体やスキーム V を考えよう。V から $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{Z}} V$ なる $\bar{P} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}(R))$ 上のスキームを得ることができる。これは基本的には正標数の体 $\mathbb{F}_p$ 上に V を還元したもの $V \mod p$ をいろいろな p での挙動を考えるものである。その $\mathcal{U} \in \bar{P} \setminus P$ でのファイバーは標数 0 の体 $\mathbb{F}_{\mathcal{U}}$ 上のスキームである。つまり、$(V \mod p)$ の極限の挙動として $\mathbb{F}_{\mathcal{U}}$ の挙動を考えることができる。

図式的に書くと、次のような具合である。

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{Z}\ \text{での話}) \arrow[dl, bend right, "\text{mod p}"'] \arrow[d, "\text{係数拡大}"] \\
(\text{多くの } \mathbb{F}_p \text{ での話}) \arrow[r, shift right, "\text{超フィルター r}"'] & (\mathbb{F}_{\mathcal{U}}\ \text{での話}) \arrow[l, shift right, "\text{p 成分}"']
\end{tikzcd}$$

一般には、V として $\mathbb{Z}$ 上定義されているものばかりでは不十分だろう。その場合には $\mathbb{Z}$ を適当な代数体の整数環の適当な元による局所化、$\mathbb{F}$ を $\bar{\mathbb{F}}$ に置き換えればうまく行く場合も多い。(論法としてはLefschetz の原理と同じようなことである。) 本来、そのような場合を最初から考えたほうが効率がいいのだが、言及するときに発音しにくいという理由から今回はもっぱら定義環としては $\mathbb{Z}$ を用いることにする。

2.2. **非可換空間の取り扱いの方法.** 本講演での非可換空間の取り扱いの方針について述べよう。

通常のスキームが

(1) 外壁としての位相空間
(2) 内装として、局所的なアフィンスキームとの同相と、それに付随した局所環付き空間の構造。
(3) 滑らかさの尺度としての、regular or smooth の概念の導入。

という組立からなるように、我々の対称となるような非可換空間をつぎのように取り扱う。

(1) 外壁は、線形アーベル圏。つまり、非可換環も、(非可換) 環の層 (通常の意味のスキームを含む) も、それらの表現の全体たる線形アーベル圏としてまず把握される。標語的には

“(space) = (abelian category)”

と言ったところである。
(2) 内装として、正標数に落とした時には非可換環の層 (上の modules のアーベル圏) との同型。
(3) 滑らかさの尺度としては、Auslander regularity を用いる (後述)。

2.3. **例:ワイル環.**

$$A_n(\Bbbk) = \Bbbk\langle X_1, X_2, \ldots, X_n, \bar{X}_1, X_2, \ldots \bar{X}_n\rangle/(CCR)$$

を考える。ただし、CCR は次のような関係式である。

$$[X_i, X_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, \bar{X}_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, X_j] = \delta_{ij}$$

(δ_{ij} はクロネッカのデルタ。)

命題 2.7. $\Bbbk$ は体であるとする。このとき、

(1) $\Bbbk$ の標数 が 0 なら、$A_n(\Bbbk)$ は単純環である。(つまり、ひとつも両側イデアルをもたない。)

(2) $\Bbbk$ の標数が $p > 0$ なら、$A_n(\Bbbk)$ の中心は
$$\Bbbk[X_1^p, X_2^p, \ldots, X_n^p, \bar{X}_1^p, \ldots, \bar{X}_n^p]$$
と一致する。とくに A_n は $2n$ 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^{2n}(\Bbbk)$ 上の代数の層と「本質的には同じもの」とみなせる。

詳細は [1],[2],[5] などを参照のこと。 □

標語的に言えば、ワイル環の研究は正標数では「影」のアフィン空間の部分と「ファイバー」の行列の部分とに分かれる。標数 p が大きくなるに従って行列の部分が大きくなり、影の部分は小さくなる。

ワイル環以外にも、量子群など、さまざまな「アフィンな」対象がこのような考え方で調べられる。切ったり、貼ったり、局所環を考えたり、完備化したりとしやすいのがメリットである。

3. 本論

3.1. 非可換対応物の構成の方針.

3.1.1. 可換な場合 *(シンプレクティック多様体)*. 与えられた射影代数多様体 V に対して、非可換代数多様体を構成したい。V が $\mathbb{C}$ 上定義されるならば、よく知られているように $V(\mathbb{C})$ はシンプレクティック構造 (ケーラー構造) を持つ。シンプレクティック構造を代数的に定義するのは通常の可換の場合にも自明なことではない。この小節ではそのことについて述べよう。

問題は、V 上のシンプレクティック形式 ω や、付随するケーラー軽量 g は正則ではないというところにある。したがてそのままでは V 上のスキーム論的な関数として考えることはできない。しかし、ω や g は座標 $z_1, \ldots, z_n$ とその複素共役 $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ の多項式/有理式関数であることは十分期待できる。つまり V ではなく $V \times \bar{V}$ のような多様体を考えようというわけである。

$V \times \bar{V}$ はもうすこし標準的な言葉で言えば Weil restriction $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(V)$ である。その定義は functor として捉えるのが最も易しく, その S-値点は
$$(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(V))(S) = V(S \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$
で与えられる。(ようするに $S \mapsto V(S \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ を represent する functor (n に対応するスキーム) である。)

上記の取り扱いは言わば z と $\bar{z}$ とをあたかも独立な 2 変数として扱えといいうことであるが、ひとつ問題がある。例えば複素射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の metric について考えてみよう。これは
$$\frac{dzd\bar{z}}{1 + z\bar{z}}$$
で与えられる。 $\bar{z}$ が z の複素共役であるという仮定のもとではおとなしいものであるが、いったん z と $\bar{z}$ とを独立に動かし始めると分母が

0 になる場合を考える必要が生じてくる。講演者はこのようなことが生じる点を「unreal point」と呼んでいる。下に一応定義の形で書いおこう。(あんまりいい定義でないことは認める。)

定義 3.1. $\mathbb{Z}$ 上の $X = (X_1, \ldots, X_n), \bar{X} = (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ ($2n$ 個の独立変数) に関する多項式 f が、$f(z, \bar{z}) = 0$ を満たすような複素数 $z_1, \ldots, z_n$ ($\bar{z}$ は z の複素共役) を持たないとき、$f = 0$ の定める $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ の divisor を unreal divisor, その点を unreal points と呼ぶことにする。$\{(z, \bar{z}) | z \in \mathbb{C}^n\}$ のことを "Hermite 対角線" と呼ぶことにすると、unreal divisor とは Hermite 対角線と交わらない divisor のことである。

まとめると、V 上の Kähler 構造を $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(V)$ 上の関数 (Unreal points を除いて正則な有理式) を用いて把握すること、これが可換な場合の問題となる。

関連して、次の問題を本講演中に尋ねたいと思っている:

問題 3.1. 射影多様体 V に Fubini-Study metric から定まるシンプレクティック構造を入れるとき、V 上の調和 (k, l)-形式は $z, \bar{z}$ の有理式で表されるだろうか?

調和 $(k, 0)$-形式については正則形式であり、GAGA により上の問題はこの場合には正しいことがわかる。その複素共役を考えることにより、$(0, k)$-調和形式についても正しいことが分かる。他に、シンプレクティック形式 ω およびその高階外積 ω^k は当然ながら大丈夫である。

とくに、V が代数曲線の時に限ってはこれらで場合が尽きるのでこの問題は肯定的な答えを持つことが分かる。

3.1.2. 構成の原則. 与えられた射影代数多様体 V に対して、非可換代数多様体を構成したいわけだが、その方針を述べよう。次のような要請を満たすようにしたい:

(NK1) $V = \mathbb{P}^n$ の場合には後述のように結構明確なものがあるので、それを用いる。
(NK2) 一般の場合には $\mathbb{P}^n$ の場合の "sub" として作る。
(NK3) 影は $V \times \bar{V}$.
(NK4) 変数 'z' と '$\bar{z}$' とに対して対称である。(対称性は定義からは見えないかもしれない。 結果的に対称ならば良い。)
(NK5) 局所的には「正則」である。すなわち $\mathbb{A}^m$ (というか、その非可換化の Weyl 環) と局所同型である。

条件 (NK5) については次の小節でもう少し詳しく述べよう。

3.1.3. *Auslander regularity* による正則性の判断. 正則性 ($\mathbb{A}^m$ に「似ている」) という判断基準として、講演者は「正標数に還元した時の Auslander 正則性」を用いる。つぎの事実が便利だからである。

(1) 適当な位相的条件のもとに、gr をとって正則なら正則。(Björk の定理 [3])
(2) Auslander regularity は Morita 不変である。
(3) 可換な正則環は正則。(出発点)
(4) 正則性は局所的に判定できる。

Morita 不変性と局所性については、講演者の未発表の論文 (arXiv:1402.7153) にある。ただし Morita 不変性については基本的なので既知であると思われる。残念ながらいまのところ適当な参考文献を見つけられていない。

また、Björk　の定理の「位相的条件」は一般的な環を扱う場合には確かめるのが困難になりうるが、我々の場合にはたいてい「中心上有限な環」を扱うため、Artin-Rees 定理によりほぼ自動的に成り立つ条件である。

正標数のホップ代数は (有限性生成など妥当な条件のもとで) 必ず Auslander 正則である ([4])。とくに、量子群は (いろいろな例と考え方があるが、) すべて Auslander 正則である。このことも Auslander 正則性の一つの根拠と考えられる。

3.2. $\mathbb{C}^n$ の対応物としての Weyl 環. $\mathbb{C}^n$ に flat な metric を導入すると、これは自然に Kähler 多様体である。対応して、Weyl 環 $A_n(\Bbbk)$ を考えよう。

正標数 (実は正標数でなくても) の Weyl 環は、Auslander regular であることは、Björk の定理を用いれば容易にわかるし、すでにその筋の人はよく知っているようだ。すなわち条件 (NK5) はこの場合満足されている。(というより、これも出発点の一つである。)

命題 2.7 を見れば分かるように、$A_n(\Bbbk)$ の影は $\mathbb{A}^{2n}$ である。すなわち、(NK3) もこの場合に満足されている。

3.2.1. 対称性について. (NK4) については少し注意が必要かもしれない。A_n は確かに「対称」だが、それは自己反同型

$$* : X_i \leftrightarrow \bar{X}_i$$

に対して、という但し書きがつく。すなわち、積の順番が入れ替わる。もちろん、このことは C^*-代数など作用素環の理論などではおなじみではある。

3.3. 非可換 $\mathbb{P}^n$ の構成. お詫び:この小節の内容は、他の所で講演者が書いたもののコピペである。逆に言えばこの節の内容はそれぐらい固まっている。(文章の方はそれほどしっかりはしていないが。)... と書いていたのだが、その後見返すとチラホラ些細ではあるが誤解を生じる間違いが散見されたので、ちょっとづつ直してある。

まず射影空間の非可換化について考えよう。基本的な考え方はシンプレクティック商 (Marsden-Weinstein quotient) や

その非可換対応物で、考え方の原始的な部分は

`http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/bourdoki/erq3/index.html`
に (も) ある。シンプレクティック商は、ある意味不確定性からの必然で、位置を決めようとすると、対応する運動量を放棄しなければならないことを念頭に置いた概念である。

百聞は一見に如かずというから、実際に $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ についてシンプレクティック商のようすを見てみることにする。通常の剰余空間としての表示

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}^\times$$

について、右辺の商 (剰余空間) を二段階で実現する。

$$\mathbb{C}^n \supset S^{2n+1} \overset{/S^1}{\to} \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

次のことに注意する。

注意 3.2.
(1) S^1 は $\mathbb{C}^\times$ のコンパクト形である。
(2) 作用 $S^1 \curvearrowright \mathbb{C}^{2n+1}$ の moment map は $m = z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n$ で与えられる。
(3) S^{2n+1} は moment map m のファイバーである。

この状況を称して $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の S^1 によるシンプレクティック商であるという。
◎ moment map とは、

$$S^1 \curvearrowright \mathbb{C}^{2n+1}$$

により、S^1 の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ から $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上のベクトル場のなすリー環への準同型が定まる。(微分作用。) 言い換えれば、$\mathfrak{g}$ の各元は $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上のベクトル場を定める。シンプレクティック構造を用いれば、これは $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上の $\mathfrak{g}^*$-値 1-形式を与えられると考えることができる。その積分が moment map である。

3.3.1. シンプレクティック商の非可換バージョン. シンプレクティック商の非可換版は BRST 理論と関係がある。BRST 理論については [6] を参照。ずいぶんと昔の本だが、今改めて読んでみると、BRST の解説の箇所はまるで数学の解説を見ているかのようである。コホモロジーの議論を、一般論を展開せずに無理矢理にコサイクルとコバウンダリーとで展開する感じ、というと通じるだろうか。以下は数学的内容を講演者が解釈 (邪推?) して取り出したものである。

非可換環 A の左イデアル J に対して、その A におけるイデアライザ

$$\mathbb{I}_A(J) = \{x \in A; Jx \subset J\}$$

を考える。これは A の部分環であり、J をイデアルに持つ。よって、$\mathbb{I}_A(J)/J$ なる剰余環を得る。

補題 3.3. A の 左イデアル J に対して、次のような環の同型が存在する。

$$\mathbb{I}_A(J)/J \cong \mathrm{Hom}_A(A/J, A/J)$$

これが「制限」の考え方である。発展としては、イデアライザの元が少なすぎたりする不満を和らげるため、

$$\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_A(A/J, A/J)$$

を考えることができる。いちおう定義の形でまとめておこう:

定義 3.4. 環 A の左イデアル J に対して、A の J による「制限」を

$$\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_A(A/J, A/J)$$

で定義する。$\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}$ の構造が単純なときには、かわりに

$$\mathrm{Hom}_A(A/J, A/J)$$

で代用することもある。

「することもある」とは如何なることか、とおっしゃる方もいるっかもしれない。マア定義というより方針と言ったほうが近いかもしれない。

3.3.2. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の非可換化. $\mathbb{C}^{n+1}$ の非可換版として、前述のように Weyl 環 $A_{n+1}(\Bbbk)$ を考える。

moment map に対応して、$A_{n+1}(\Bbbk)$ は次のような元を持つ。

$$\mu_R = X_0\bar{X}_0 + X_1\bar{X}_1 + \cdots + X_n\bar{X}_n - R$$

$A = A_{n+1}(\Bbbk)$ の $J = A_{n+1}(\Bbbk)\mu_R$ による「制限」を考えたいわけである。$A = A_{n+1}(\Bbbk)$ には $\mathrm{sdeg}(X_i) = 1$, $\mathrm{sdeg}(X_j) = -1$ なる符号付き次数が入る。

$$A_{n+1}(\Bbbk)_0 = \{f \in A; \mathrm{sdeg}(f) = 0\}$$

を考えよう。 $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ ならば $\mathbb{I}_A(J) = A_{n+1}(\Bbbk)_0 + J$ がなりたつ。

$\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 0$ ならば $\mathbb{I}_A(J)$ はかなり増えてしまう実際、命題 2.7 により、Weyl 環は正標数では大きな中心を持ち、そのせいでイデアライザも大きくなる。(教訓: 標数 p では微分は「切れの悪いナイフ」である。) そこで、標数 0 で subquotient を考えて、その解釈は標数 p でやるという、曲芸みたいなことをすることにする。つまり、ここでは標数 0 の場合の環を mod p で考えていると想定することで、そのような場合でも $(A_{n+1}(\Bbbk)_0 + J)/J \cong A_{n+1}(\Bbbk)_0/A_{n+1}(\Bbbk)_0 \cdot \mu_R$ を 「制限」の座標環として採用しよう。

定義 3.5. “非可換 $\mathbb{P}^n$”(暫定的) を非可換環

$$A_{n+1}(\Bbbk)_0/A_{n+1}(\Bbbk)_0 \cdot \mu_R$$

として定義する。

準備の項 (2.1.4 節) で述べたように、この環を $\bar{\mathbb{F}}(P) = \prod_{p\in P} \bar{F}_p$ 上で考えることにより (いや、べつに $\bar{F}$ ではなくて $\mathbb{F}$ でも良かったのだが...)、標数 0 での姿 (表現論) と、標数 p での姿、とくに影、を結びつけることができる。

3.3.3. 完備化. 前小節で定義された 環 $A_{n+1}(\Bbbk)_0/A_{n+1}(\Bbbk)_0 \cdot \mu_R$ について、特に $\Bbbk$ が標数 p の体について考えよう。じつはこの環の土台空間は射影空間に埋め込める。非可換射影空間をいちから定義しようというのに既成品の射影空間を持ち出すのは変に思われるかもしれない。しかしここでは既成の射影空間を単に境界をつけてコンパクト化するための道具として用いる。

他のどの元とも可換な C をとり、

$$[X_i, X_j] = 0 \quad , [\bar{X}_i, \bar{X}_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, X_j] = \delta_{ij} C \qquad (i, j = 0, 1, 2, \dots, n).$$

という交換関係を考える。これを仮に CCRC と呼ぼう。次のような環を考える。

$$\tilde{A}^{(C)}_{n+1}(\Bbbk) = \Bbbk\langle X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n, C\rangle/\mathrm{CCRC}.$$

この代数にも、 $\mathrm{sdeg}(X_i) = 1$, $\mathrm{sdeg}(X_j) = -1$, $\mathrm{sdeg}(C) = 0$ なる符号付き次数が定まる。

定義 3.6. 上の記号のもとに、

$$A_{n;R}(\Bbbk) = \tilde{A}^{(C)}_{n+1}(\Bbbk)_0/(\sum_i X_i \bar{X}_i - RC)$$

と定義する。

補題 3.7. $\Bbbk$ は標数 $p \neq 0$ の体であるとする。このとき次のことが成り立つ。

(1)

$$\Bbbk[X_0^p, X_1^p, \dots X_n^p, \bar{X}_0^p, \bar{X}_1^p, \dots \bar{X}_n^p, C^p]$$

は $\tilde{A}_{n+1}(\Bbbk)$ の中心に含まれる部分環で、$2n+3$ 変数の多項式環である。

(2) $A_{n;R}(\Bbbk)$ においては、

$$\sum_{i=0}^n X_i^p \bar{X}_i^p = (R^p - R)C^p$$

がなりたつ。

(3) とくに、$R^p - R \neq 0$ のとき、$A_{n;R}(\Bbbk)$ は

$$\Bbbk[\{X_i^p \bar{X}_j^p\}_{0\le i,j\le n}]$$

上の graded algebra である。(この環は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の Segre embedding の射影座標環であることに注意。)

(4) $A_{n;R}(\Bbbk)$ は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{n;R}$ を定義する。

定義 3.8. 上の補題の記法のもとで、射影空間の非可換対応物 (標数 p) を $\mathcal{A}_{n;R}$ と定義する。

非可換な対称として「環」が出てきたり「環の層」がでてきたりと、「どれを考えるねん」とツッコミが入りそうだ。基本的には講演者は

“(space) = (abelian category)”

という立場を取る。すなわち環も環の層も、その表現や表現の層のなすアーベル圏をもって他と比べることにする。

なお、定数 $R^p - R$ が 0 であるか否かによって $\mathcal{A}_{n;R}$ の状況はかなり異なる。この講演では以下断らない限り $R^p - R \neq 0$ であると仮定する。(この仮定は一方では “generic” とも言えるし、他方では” 不自然” とも言える。ここではこの条件の是非については深く検討はしないことにする。)

3.3.4. $C \neq 0$ での局所座標. $\{C \neq 0\}$ なる affine locus での $\mathcal{A}_{n;R}$ の座標による記述を与えよう。 つまり C が可逆であるような locus である。

補題 3.7 の (2) からわかるようにこのとき $X_0^p \bar{X}_0^p$, $X_1^p \bar{X}_1^p$, $X_2^p \bar{X}_2^p$, $\dots$, $X_n^p \bar{X}_n^p$ のすべてが 0 と一致するような geometric point は存在しないので、変数の順序を必要に応じて入れ替えることにより、

$$X_0^p \bar{X}_0^p \text{ は可逆である}$$

と仮定して良い。($\{C \neq 0\}$ はそのような affine pieces で覆うことができる。) このとき、 $\mathcal{A}_{n;R}$ は次のような「非可換座標」(生成元) をもつ

$$x_i = X_0^{-1} X_i \qquad (i = 1, \dots n)$$

$$x_i^\dagger = C^{-1} X_0 X_i \qquad (i = 1, \dots n)$$

(もとの $X \leftrightarrow \bar{X}$ 対称性は崩しているので注意) これらの生成元は次のような関係式を満たす。

$$[x_i^\dagger, x_j] = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \dots, n)$$

つまりこの affine piece では Weyl 環が座標環として出てくる。ただし、そのままでてくるわけではなく、$C \neq 0$ に対応して、

$$(R^p - R) - (x_1^p (x_1^\dagger)^p + x_2^p (x_2^\dagger)^p + x_3^p (x_3^\dagger)^p + \cdots + x_n^p (x_n^\dagger)^p) \neq 0$$

なる “Spec(A_n)” のアフィン開集合と同型なものがでてくることになる。とくに、**$\{C \neq 0\}$ では $\mathcal{A}_{n;R}$ は Auslander 正則である。**

この記述のしかたは $*$-環としての構造を表すには不向きであることに (さっき小さい字で書いたが) 再び注意しておこう。これは $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の局所的な構造が $\mathbb{C}^n$ とは複素構造を見る限りは同じであるがケーラー

構造まで見るとまるで違うことに対応しているので、若干やむをえないと思われる。

3.3.5. $C=0$ の付近についての注意。. 条件 $C=0$ は $\sum_{i=0}^{n} X_i^p \bar{X}_i^p = 0$ を意味する。これは複素数体上で $\bar{X}_i^p$ が X_i^p の複素共役という状況では起こり得ないことである。したがって、この付近に特異点があってもやむを得ないというのが、講演者の立場であるが、実際にはAuslander正則であるようにみえる。どのようなことをするかだけをざっと書いておこう:

$$\begin{aligned} a_i &= X_0^{-1} X_i \qquad (i = 2, 3, \dots, n+1), \\ b_j &= \bar{X}_j \bar{X}_1^{-1} \qquad (j = 2, 3, \dots, n+1), \\ c &= X_0^{-1} \bar{X}_1^{-1} C, \\ \tau &= X_0^{-1} X_1. \end{aligned}$$

とおく。次の関係式がすぐにわかる。

$$\begin{aligned} [a_i, a_j] &= 0, \\ [b_i, b_j] &= 0, \\ [b_j, a_i] &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

すなわち、$\{b_2, \dots, b_{n+1}, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ はCCR をみたす。c はこれらの元と可換であり、最後に τ は

$$\tau, b_i = b_i c, [\tau, a_i] = 0, [\tau, c] = c^2$$

を満たす。要はこの環を解析すればよい。前述の Björk の定理によれば、「適当な filtration で gr をとって正則ならば正則」で、実際この環はそのように見えるのだが、はっきりしたことを言うにはもう少し検討が必要なので、ここではこのぐらいにしておく(というかしておいて下さい。)

3.4. 非可換アフィン代数多様体の構成.

定義 3.9. アフィン代数多様体 $V \subset \mathbb{A}^n$ にたいして、その定義イデアルを $I_V \subset \Bbbk[X_1, \dots X_n]$ と書こう。I_V を ("bar を含まない" 元の集まりとみて) ワイル環 A_n の部分集合と見ると、次のような環を考えることができる。

$$A_V = A_n / (A_n \cdot I_V^p + A_n \cdot \bar{I}_V^p).$$

これを V に対応する非可換代数多様体とよぼう。

A_V の影は $V \times \bar{V}$ であることに注意しよう。

$V \times \bar{V}$ の点 (Q_1, Q_2) をとる。V の Q_1 での local definiing equations を $f_1, \dots, f_s$ とおき、残りの関数 $f_{s+1}, \dots f_n$ を適当に選んで

$$f_1, \dots, f_s, f_{s+1}, \dots f_n$$

が $\mathbb{A}^n$ の Q_1 のまわりでの局所座標であるとしよう。この局所座標に対応して「この座標に関する偏微分」が $\mathbb{A}^n$ 上の局所ベクトル場として定義され

$$\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_s, \tilde{\eta}_{s+1}, \dots, \tilde{\eta}_{s+t}$$

が A_n の (居所的な (つまり適当な局所化の)) 元として定義される。(Q_1, Q_2) での $\mathbb{k}[X_1^p, \dots, X_n^p, \bar{X}_1^p \dots, \bar{X}_n^p]$ の元として

$$f_1^p, \dots, f_s^p, f_{s+1}^p, \dots, f_{s+t}^p,$$
$$\bar{f}_1^p, \dots, \bar{f}_s^p, \tilde{\eta}_{s+1}^p, \dots, \tilde{\eta}_{s+t}^p$$

を考える $(n = s + t)$。これが (Q_1, Q_2) での局所座標 (正確にはそれをフロベニウスでひねったもの) であるような点においては、A_V は形式的に (つまり、局所環の formal completion 上で) ワイル環上の行列環 $M_s(A_t)$ と同型であることが計算でわかる。すわなち、そのような点では A_V (に対応する層) は Auslander regular である。(Q_1, Q_2) がそのような点であるためには、

$$\det\left(\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{\partial}_j(f_i)\partial_j(\bar{f}_k)\right)_{1\le i,j\le n}\right) \neq 0$$

ならばよい。これは "エルミート対角線" $Q_2 = \bar{Q}_1$ 上では適当な Gram 行列式で、したがって non-zero が保証される。

3.5. 非可換射影代数多様体の構成. 任意の代数多様体に対して非可換代数多様体が構成される。

$$\mathcal{A}/(\mathcal{A} \cdot \mathcal{I}_V^p + \mathcal{A} \cdot \overline{\mathcal{I}_V}^p)$$

同様な理由でこれも肝心なところ (エルミート対角線の近傍) では Auslander regular である。

4. 結論 (というよりこれから目指すこと

- cohomology の決定、計算。
- Frobenius vs complex conjugate の決着。
- Harmonic theory

References

[1] A. Belov-Kanel and M. Kontsevich. Automorphisms of the Weyl algebra. Lett. Math. Phys, 74(2):181–199, 2005.
[2] A. Belov-Kanel and M. Kontsevich. The jacobian conjecture is stably equivalent to the dixmier conjecture. Mosc. Math. J., 349(2):209–218, 2007.
[3] J. E. Björk. The Auslander condition on Noetherian rings, volume 1404 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1989.

[4] K. A. Brown and K. R. Goodearl. Homological aspects of noetherian pi hopf algebras of irreducible modules and maximal dimension. J. Algebra, 198(1):240–265, 1997.
[5] Y. Tsuchimoto. Preliminaries on Dixmier conjecture. Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math., 24:43–59, 2003.
[6] 九後 汰一郎. ゲージ場の量子論 ⟨1⟩. 新物理学シリーズ. 培風館, 1989.