非可換ケーラー多様体の試み

土基 善文

1. INTRODUCTION

本講演では、非可換代数幾何学の一つの考え方について述べたい。まず 2 節で量子的な考え方について簡単な説明をして、この理論の動機づけを与える。つぎに、3 節で非可換代数幾何学の基本的な問題意識を述べる。

そのあと 4 節でアーベル圏、5 で ultra filter について述べる。最後に 6 節で応用問題として「非可換ケーラー多様体」の可能性について述べる。

1.1. changelog.

本稿は少しずつ書き換わる可能性があります。
2014/9/20:

- 「アーベル圏」の節を書き加えました。とくに、線形アーベル群のことについて質問がありましたのでそのリファレンス ([4]) をつけました。
- 同じ箇所に、「この手法は量子群にも使える」という一文を付け加えました。講演のあとで「そこをしっかり表明せんかい」と怒られてしまったのを受けたものです。スミマセン。

2. 量子的な考え方

非可換幾何学は、量子力学の香りをつけた幾何学である。特に強調したいのは、次の点である。

(1) 不確定性。全ての量を同時に観測可能とは限らない。これは複数の行列の同時固有値を見つけるのが一般には不可能なことと関連している。
(2) 不確定性の伝染。「非可換多様体」X を隔離された対象としてわれわれはヌクヌクと可換の世界で X 以外の全ての量を観測するなどということは無理だということである。

特に後者については、我々が構築すべき理論が全て量子的な考え方の洗礼を受けねばならないことを意味しており、場の量子論、重力の量子論などの考察の必要性の根拠となると思われる。

Date: 2014 年 9 月 19 日 11:15 〜 12:15.

2.1. シュレーディンガー表示. 状態ベクトルを空間 M 上の L^2 関数として表現。微分作用素が運動量に対応する作用素である。古典的には多様体 M 上の点を考えていた粒子が、シュレーディンガー表示では M 上に振幅をもって広がっているという描像を得ることができる。(波動関数)

M がパラメータで動きまわることがある。(重力場) 「伝染」の話により、M のパラメータも非可換であるべきである。これはモデュライ空間の非可換化にあたる (第二量子化)。

モデュライ空間自体も適当な定義方程式で定義される空間である。従ってその係数も非可換であるべき。そうなるとモデュライ空間のパラメータ空間の量子化 (第三量子化) が考えられる。

以下、何度でも繰り返されうる。その意味で

「定義される限り間違っている。」

と言っても過言ではない。(というわけではもちろんないが、いまはそう言い切ってしまおう。)

ただし、係数環が $\mathbb{Z}$ のときには話が別である。

3. 非可換代数幾何学の問題意識

非可換代数幾何学とは、単純に考えれば、非可換環に対してその「Spec」を考えてそれらを貼りあわせたものを考えることだろう。

ただし量子論の場合には前節で述べたようなさまざまな問題がある。

例えばワイル環を最初の例として考えよう。なにしろここ (正準交換関係) から量子論が始まっているので、これができないと話にならない。

- じつはワイル環は、標数 0 では単純環である。そこで代数幾何学の通常の意味での「点」の定義がまず困ってしまう。すると当然 「貼り合わせ」も目に見えない。(解析を使うなら、C^*-代数, W^*-代数 (フォン・ノイマン代数) の議論で、これらは「柔らかい」のである程度「観測」に誤差を持たせて点のようなものを考えたりできると期待される。代数幾何学では不等式が使えないので「大体」の話ができない。)
- 通常の意味の実多様体を、位相空間に適当な構造 (地図帳) を乗せたもの、と考えたように、なにか位相空間のような大きな枠組み (「容れ物」) が欲しい。

C^*-環を容れ物として考えることももちろん有力だが、すこし危険なところもあるように感じられる。そのことに触れるためにはすこし準備が必要なので、まず次の例について考えよう。

例 3.1.
$$\mathbb{C}\langle X, X^{-1}, T, T^{-1}\rangle / TX = (X+1)T$$
を考えるとこの環は「有限生成」である。にもかかわらず $X = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ と無数の「穴」が開いてしまっている。と、こう言っても非可換環は

見えないと言われてしまうかもしれない。本講演の手法を用いれば比較的易しく捉えることができる。(と思う。)

例 3.2.

$$\mathbb{C}\langle X, X^{-1}, D\rangle / DX = XD + 1$$

を考える。この環の "C^*-包" のようなものを考えたい。これには「穴」がひとつだけ開いている。(もっと詳しく議論すべきだが省略する。) うまくすると D の exponential のようなものが入るはずだが、すると無数の「穴」が必要になることがわかる。

「観るは観られるなり」で、観測する側がヌクヌクと観測する候補の関数を無条件で増やすような虫の良いことは量子的な状況では不可能なのだ。その意味では関数を無条件に足したり引いたり掛けたりするのもかなり罪深いが、今回はそこまでは追求しないことにする。

この小論での私の答えは:

(1) 正標数の世界と標数 0 の世界とを行き来して「点」を増やし、非可換な対象を見られるようにする。
(2) 「容れ物」としてはアーベル圏を用いる。

の二点である。本研究集会の性質上、多分後者がいちばんこの講演でいちばん聴衆の皆様の気になるところであるかもしれないが、残念ながら次の節で少し触れるにとどまる。むしろ前者の話ばかりすることになると思う。

理由は、そのほうが「目に見える」感じがするからである。

4. アーベル圏

よく知られているように、$X = \mathrm{Spec}(A)$ 上の準連接層 と A-加群とは一対一に対応する。

したがって、加群の全体を調べる (表現論) ことと、層の全体を調べることは同じ事である。

じつは A-加群の圏だけから A を復元できる。

このアイディアは一般のスキームでも ok である。つまり、スキーム X を X 上の準連接層のアーベル圏から復元できる。更に発展して、貼りあわせ etc を圏だけで考えることができる。

結論: アーベル圏はすぐれた「容れもの」である。

なお、立場によってはテンソル積を交えた「淡中圏」のようなモノのほうが良いということもあるかもしれない。講演者の立場はとりあえず制約の弱いものを「容れもの」として採用して、そこの内容物はあとから充実させれば良いというものである。

4.1. 線形アーベル圏の利用.

(話が多少前後してしまうのだが、ここで述べることにする。)

$\mathbb{Z}$-線形アーベル圏を考えて、それを mod p することで、$\mathbb{F}_p$-上の線形アーベル圏が得られる。

あとで見るように、標数 p では非可換幾何学の対象は比較的易しくなる場合が多い。簡単のため、ここではそのような対象として代数空間上の代数の層 $\mathcal{A}$ を考えることにし、これを LNAS と呼ぶことにする。この節の考えに従って、$\mathcal{A}$ を考える代わりに $\mathrm{Qcoh}(\mathcal{A})$ というアーベル圏にフォーカスする。そして、

$$(\mathrm{NAS}) = \begin{cases} \mathbb{Z}\text{-線形アーベル圏 } \mathcal{C} \\ + \\ \text{各素数 } p \text{ ごとの同型 (”chart”)} \\ \mathcal{C} \mod p \cong \mathrm{Qcoh}(\mathcal{A}_p) \quad (\exists \mathcal{A}_p : \mathrm{LNAS}) \end{cases}$$

と定義する。詳細は [4] に書いてあるので興味がある方は参照のこと。なお、この考え方で Weyl 環、量子群 (いろいろな定義があるがその大部分) が扱える。つまり、本発表の基本的な手法はそれらのものを扱える。

5. ULTRA FILTER

正標数と標数 0 の行き来をするために、ultra filter の議論を使う。この節ではその復習をしよう。

5.1. Ultra filter による正標数から標数 0 への回帰。.

定義 5.1. 集合 X の部分集合の族 $\mathfrak{F}$ は次の条件を満たすとき filter と呼ばれる。

(1) $\mathfrak{F} \ni A, B \implies A \cap B \in \mathfrak{F}$.
(2) $\mathfrak{F} \ni A, \quad A \subset A_1 \subset X \implies A_1 \subset \mathfrak{F}$.

極大な filter のことを ultra filter と呼ぶ。

次の言い換えが便利かもしれない:

補題 5.2. 集合 X に離散位相を入れて位相空間と考え、その上の複素数値有界関数全体を $C_b(X)$ とかくことにする。$C_b(X)$ には各点での演算で環 (C^*-環) の構造が入る。さらに、$C_b(X)$ の極大イデアル全体 $Y = \mathrm{Spm}(C_b(X))$ には、$C_b(X)$ の各元を連続にするような最弱な位相を入れておく。このとき、次の 5 つのものは同等である。

(1) Y の点 (すなわち、$C_b(X)$ の極大イデアル)
(2) $C_b(X)$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$-代数としての準同型 φ
(3) $C_b(X)$ から $\mathbb{C}$ への $*$-環準同型
(4) X の最大コンパクト化 (Stone-Čech コンパクト化) の点
(5) X の ultra filter

証明は難しくないが、Web だと

`http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/bourdoki/bourdoki_j.html`

の (7)「”Non commutative algebraic space of finite arithmetic type” について」の「余談」のところにある。

5.2. **更に余談.** ここの小節に書かれることは全く本論と関係ないので、本講演でもしゃべるつもりは一切ないのだが、以前に広島大学の A.I. 先生に質問された際に正しく答えられなかったので (という極めて個人的理由により) 念のために書いておく。

補題 5.3. 集合 X に離散位相を入れて、その上の $\mathbb{C}$-値有界連続関数の全体 $C(X)$ を考える。このとき、$C(X)$ の真のイデアル I と X 上の filter $\mathfrak{F}$ とは 1 対 1 で対応する。$f \in C(X)$ に対して、その零点集合を $V(f)$ と書くことにする。すなわち、

$$V(f) = \{x \in X; f(x) = 0\}.$$

すると、上の対応は具体的には、次のような関係式で与えられる。

$$\mathfrak{F}(I) = \{V(f); f \in I\}.$$

この対応の逆対応は次の式で与えられる。

$$I(\mathfrak{F}) = \{f \in C(X); V(f) \in \mathfrak{F}\}.$$

証明には次のことを使う。

補題 5.4. 次のことが成り立つ。

(1) $V(f) \cap V(g) = V(|f|^2 + |g|^2)$.
(2) $V(f + g) \supset V(f) \cap V(g)$.
(3) $V(fg) = V(f) \cup V(g)$.
(4) $V(f_1) \subset V(f) \implies \exists h \in C(X)$ such that $f = hf_1$.
(5) 任意の $S \subset X$ にたいして、$S = V(\chi_{\complement S})$ である。(ただし $\chi_{\complement S}$ は S の補集合の定義関数。)

証明は簡単なので省略する。 $\square$

系 5.5. X の部分集合に包含関係で順序を入れたものは $C(X)$ の元を同伴関係で分類したものに整除関係で順序を入れたものと順序同値である。

[補題 5.3 の証明]:
(i) まず、任意の filter $\mathcal{F}$ に対して、 $I(\mathcal{F})$ は $C(X)$ のイデアルであることを示そう。任意の $f_1, f_2 \in I(\mathcal{F})$ と $g_1, g_2 \in C(X)$ にたいして、$V(f_1g_1+f_2g_2) \supset V(f_1g_1) \cap V(f_2g_2) \supset V(f_1) \cap V(f_2)$. $V(f_i) \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2)$ に注意する。filter の定義により、$V(f_1) \cap V(f_2) \in \mathcal{F}$ や、それを部分集合として含む $V(f_1g_1+f_2g_2)$ は $\mathfrak{F}$ の元である。ゆえに、$f_1g_1+f_2g_2 \in I(\mathcal{F})$.
(ii) つぎに、$C(X)$ の任意のイデアル I にたいして、$\mathfrak{F}(I)$ は X の filter であることを示そう。

$A_1, A_2 \in \mathfrak{F}(I)$ に対して、$\exists f_1, f_2 \in I$ が存在して、$V(f_i) = A_i$ $(i = 1, 2)$.

$$A_1 \cap A_2 = V(f_1) \cap V(f_2) \supset V(f_1^2 + f_2^2).$$

$f_1^2 + f_2^2 = f_1\bar{f}_1 + f_2\bar{f}_2 \in I$ であるから、$A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{F}(I)$. これで filter の一番目の条件が確かめられた。二番目の条件については系 5.5 を用いれば簡単に確かめられる。
(iii) $C(X)$ のイデアル I に対して、

$$
\begin{aligned}
&I(\mathcal{F}(I))\\
=&\{f \in C(X); pV(f) \in \mathcal{F}(I)\}\\
=&\{f \in C(X); \exists f_0 \in I \text{ such that } V(f) = V(f_0)\}\\
=&\{f \in C(X); \exists f_0 \in I \text{ such that } f \underset{\text{同伴}}{\sim} f_0\}\\
=&I
\end{aligned}
$$

(iv) X の任意の filter $\mathcal{F}$ にたいして

$$\mathcal{F}(I(\mathcal{F})) = \{V(f); f \in I(\mathcal{F})\} = \{V(f); V(f) \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}$$

□

補題 5.6. X の ultra filter は $C(X)$ の素イデアルと一対一に対応する。

5.3. **ultra filter をどう用いるか.** 前小節とは打って変わって大事な話である。

定義 5.7. $P = \mathrm{Spm}(\mathbb{Z})$ ($\mathbb{Z}$ の極大イデアルの全体の集合。素数全体の集合と言っても同じ) の non-principal Ultra filter $\mathcal{U}$ を一つ固定する毎に、次のような環を考えることができる。

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{U}} = \prod_p \mathbb{F}_p/(\mathcal{U}\text{ で }0)$$

$$\mathbb{C}_{\mathcal{U}} = \prod_p \bar{\mathbb{F}}_p/(\mathcal{U}\text{ で }0)$$

上の定義はちょっとずぼらすぎるだろうか。$\prod_p \mathbb{F}_p$ の元とは、 列

$$(a_p)_{p\in P} \qquad (a_p \in \mathbb{F}_p)$$

のことであり、それらの全体 $\prod_p \mathbb{F}_p$ は成分ごとの演算により可換環をなす。“($\mathcal{U}$ で 0)” でこの環を割るというのは、環 $\prod_p \mathbb{F}_p$ の次のようなイデアル $I_{\mathcal{U}}$ による剰余環を考えて、それを $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ と呼ぼう、ということである。

$$I_{\mathcal{U}} = \{(a_p)_{p\in P} \in \prod_p \mathbb{F}_p; \exists U \text{ such that } a_p = 0 \text{ for all } p \in U\}$$

$\mathbb{C}_{\mathcal{U}}$ のほうも同様。

命題 5.8. $\mathcal{U}$ は $\mathrm{Spm}(\mathbb{Z})$ の non-principal ultra filter であるとする。このとき $\mathbb{Q}_{\mathcal{U}}$ は標数 0 の体であり、$\mathbb{C}_{\mathcal{U}}$ は標数 0 の代数的閉体である。

以下、$\mathcal{U}$ なる $\mathrm{Spm}(\mathbb{Z})$ の non-principal ultra filter を一つ決めて議論することにする。このとき図式的に書くと、次のような具合である。

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{Z}\ \text{での話}) \arrow[dl, bend right, "\text{mod p}"'] \arrow[d, "\text{係数拡大}"] \\
(\text{多くの } \mathbb{F}_p \text{ での話}) \arrow[r, shift right, "\text{ultrafilter}"'] & (\mathbb{C}_{\mathcal{U}} \text{ での話}) \arrow[l, shift right, "\text{p 成分}"']
\end{tikzcd}$$

これについて以下詳しく述べよう。$\mathbb{Z}$ 上有限生成な「非可換多様体」X を考える。これを直接感覚的に捉えるのは難しいので、まず正標数の世界に落とし、 $X \mod p$ のようなものを考える。正標数の世界では、関係する環たちはしばしば大きな中心をもち、したがってそれら中心たちの Spec は通常の代数幾何学で取り扱うことができる。こうして通常の (但し $\mathbb{F}_p$ 上の) 代数多様体 M_p が各素数 p に対して得られる。正標数の世界はやはり見えにくい、という意見もありうるわけだが、これを ultra filter $\mathcal{U}$ を用いて切り抜けることができる。$\mathcal{U}$ により p での話の「極限」として再び標数 0 の多様体 $M_{\mathcal{U}} = \lim_{p\to\mathcal{U}} M_p$ が得られ、結果的に標数 0 の通常の多様体の議論が適用できるのである。講演者は M のことを X の「shadow」と呼び、このプロセスを「反量子化 (anti-quantization)」と呼んでいる。

5.4. **例:ワイル環.**

$$A_n(\Bbbk) = \Bbbk\langle X_1, X_2, \ldots, X_n, \bar{X}_1, X_2, \ldots \bar{X}_n\rangle/(CCR)$$

を考える。ただし、CCR は次のような関係式である。

$$[X_i, X_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, \bar{X}_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, X_j] = \delta_{ij}$$

(δ_{ij} はクロネッカのデルタ。)

命題 5.9. $\Bbbk$ は体であるとする。このとき、

(1) $\Bbbk$ の標数 が 0 なら、$A_n(\Bbbk)$ は単純環である。(つまり、ひとつも両側イデアルをもたない。)

(2) $\Bbbk$ の標数が $p > 0$ なら、$A_n(\Bbbk)$ の中心は

$$\Bbbk[X_1^p, X_2^p, \ldots, X_n^p, \bar{X}_1^p, \ldots, \bar{X}_n^p]$$

と一致する。とくに A_n は $2n$ 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^{2n}(\Bbbk)$ 上の代数の層と「本質的には同じもの」とみなせる。

詳細は [1],[2],[3] などを参照のこと。 □

標語的に言えば、ワイル環の研究は正標数では「影」のアフィン空間の部分と「ファイバー」の行列の部分とに分かれる。標数 p が大きくなるに従って行列の部分が大きくなり、影の部分は小さくなる。

ワイル環以外にも、量子群など、さまざまな「アフィンな」対象がこのような考え方で調べられる。切ったり、貼ったり、局所環を考えたり、完備化したりとしやすいのがメリットである。

6. ケーラー多様体

前節の方法論は、アフィンな非可換代数多様体についてはかなり簡明なビジョンを与えるように思われる。では、アフィンでない多様体についてはどうだろうか。ここでは射影多様体の非可換版を考えたい。と言ってもここでの取り扱い方は普通に考えられるものとは少し違っている。

一般的に、シンプレクティック幾何学のマネをすることで非可換幾何学の道具が得られる。(あくまで参考にするだけである。厳密に相似関係が成り立つわけではない。) 今回は基本的には複素射影多様体のケーラー構造の入れ方のマネをする。大まかに言うと、複素代数多様体 X に対して、それを実多様体と見たものの複素化を考えることに当たる。もっと詳しく言おう。$\mathbb{C}$ 上の d 次元射影代数多様体 X に対して、$X(\mathbb{C})$ を実多様体と見ると、そこには

- $2d$ 次元のシンプレクティック多様体の構造
- 複素構造

が定義される。自然なものにシンプレクティック多様体の構造が入るのであれば、これは非可換な現象の影であるのではないかと推定される。そして $X(\mathbb{C})$ には複素構造が、シンプレクティック構造と協調的に入るというのであるから、そのようなことが非可換のほうでもあると期待するのは自然だと考える。さしあたって次のようなガイド問題を考えることにしている。

問題 6.1. 複素射影多様体に対して、その非可換対応物が存在することを示し、それを用いて、(とくにコホモロジー群 $H^{p,q}$ への) 複素共役と Frobenius action を解析せよ。

このような状況では、タイトルは「非可換複素射影多様体」とすべきではないかという意見もあろうと思うが、ここではその「ケーラー構造」に特に着目したいので「非可換ケーラー多様体」とした。

なお、現在「非可換射影空間」については今回の趣旨に沿うものがあると確信しているが、「非可換射影多様体」についてはあと一歩の研究が必要であるように感じられる。

6.1. **寄り道:ふしぎの数 2.** この小節に書くことは寄り道ではあるが、当研究の強い動機付けである。できれば talk でも話したいが、その余裕があるかどうか...

つぎのような事実には数「2」が見え隠れしている。いくつかの事実の間には明白な関係があるが、そうでないものもある (以下、いろいろなものの「有限次元性」その他の仮定が必要であるが、大事なところだけ見たいので詳細は省く):

- Weyl 環の 生成元の個数は $2n$.
- symplectic manifold の次元は $2n$.

- 位置-運動量の双対性。
- 実ベクトル空間の symmetric bilinear form が非退化なら、そのベクトル空間の次元は 2n.
- 行列環 $M_n(\Bbbk)$ の $\Bbbk$ 上の次元は n^2.
- 体 $\Bbbk$ 上の simple central algebra の次元は n^2.
- $[\mathbb{C}:\mathbb{R}] = 2$.
- 複素多様体は $\mathbb{R}$ 上偶数次元。
- $\dim_{\Bbbk}(\mathrm{End}(\Bbbk^n)) = n^2$.
- End には入り口と出口がある。($\mathrm{End}(V) \cong V \otimes V^*$). (operad の世界が気になる。)
- 線分の端点は 2 つ。
- 2 次形式は歴史的によく調べられてきた。
- ホモロジー代数は符号を持つ。
- 包除原理 (inclusion-exclusion principle) の二周期性 (+,- の符号)
- super theory (super variables.)

Weyl 環を調べるにあたって、これらの関係性を意識する部分が少なからずある。本研究を通じてそれを少しでも明らかにしておきたいと思っている。

6.2. $\mathbb{C}^n$ のシンプレクティック商としての $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. まず射影空間の非可換化について考えよう。基本的な考え方はシンプレクティック商 (Marsden-Weinstein quotient) やその非可換対応物で、考え方の原始的な部分は

`http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/bourdoki/erq3/index.html`

に (も) ある。シンプレクティック商は、ある意味不確定性からの必然で、位置を決めようとすると、対応する運動量を放棄しなければならないことを念頭に置いた概念である。

百聞は一見に如かずというから、実際に $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ について見て見ることにする。

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}^\times$$

について、右辺の商を二段階で実現する。

$$\mathbb{C}^n \supset S^{2n+1} \overset{/S^1}{\to} \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

注意 6.1.

(1) S^1 は $\mathbb{C}^\times$ のコンパクト形である。
(2) 作用 $S^1 \curvearrowright \mathbb{C}^{2n+1}$ の moment map は $m = z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n$ で与えられる。
(3) S^{2n+1} は moment map m のファイバーである。

この状況を称してシンプレクティック商という。

◎ moment map とは、

$$S^1 \curvearrowright \mathbb{C}^{2n+1}$$

により、S^1 の Lie 環 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上のベクトルフィールドのなすリー環への準同型が定まる。(微分作用。) 言い換えれば、$\mathfrak{g}$ の各元は $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上のベクトル場を定める。シンプレクティック構造を用いれば、これは $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上の $\mathfrak{g}^*$-値 1-形式を与えられると考えることができる。その積分が moment map である。

6.3. **シンプレクティック商の非可換バージョン.** シンプレクティック商の非可換版は BRST 理論と関係がある。BRST 理論については [5] を参照。ずいぶんと昔の本だが、今改めて読んでみると、BRST の解説の箇所はまるで数学の解説を見ているかのようである。コホモロジーの議論を、一般論を展開せずに無理矢理にコサイクルとコバウンダリーとで展開する感じ、というと通じるだろうか。以下は数学的内容を土基が解釈 (邪推?) して取り出したものである。

非可換環 A の左イデアル J に対して、その A におけるイデアライザ

$$\mathbb{I}_A(J)=\{x\in A; Jx\subset J\}$$

を考える。これは A の部分環であり、J をイデアルに持つ。よって、$\mathbb{I}_A(J)/J$ なる因子環を得る。

補題 6.2. *A の 左イデアル J に対して、次のような環の同型が存在する。*

$$\mathbb{I}_A(J)/J\cong \operatorname{Hom}_A(A/J,A/J)$$

これが「制限」の考え方である。発展としては、イデアライザの元が少なすぎたりする不満を和らげるため、

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_A(A/J,A/J)$$

を考えることができる。

6.4. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ **の非可換化.** $\mathbb{C}^n$ の非可換版として、Weyl 環

$$A_{n+1}(\Bbbk)=\Bbbk\langle X_0,X,1,\dots,X_n,\bar{X}_0,\bar{X}_1,\dots\bar{X}_n\rangle/(CCR)$$

を考える。ただし、CCR は次のような関係式である。

$$[X_i,X_j]=0,\quad [\bar{X}_i,\bar{X}_j]=0,\quad [\bar{X}_i,X_j]=\delta_{ij}$$

(δ_{ij} はクロネッカのデルタ。)

moment map に対応して、$A_{n+1}(\Bbbk)$ は次のような元を持つ。

$$\mu_R=X_0\bar{X}_0+X_1\bar{X}_1+\dots X_n\bar{X}_n-R$$

$A=A_{n+1}(\Bbbk)$ の $J=\mathbb{A}_{n+1}(\Bbbk)\mu_R$ による「制限」を考えたいわけである。$A=A_{n+1}(\Bbbk)$ には $\operatorname{sdeg}(X_i)=1$, $\operatorname{sdeg}(X_j)=-1$ なる符号付き次数が入る。

$$A_{n+1}(\Bbbk)_0=\{f\in A;\operatorname{sdeg}(f)=0\}$$

を考えよう。 $\operatorname{char}(\Bbbk)=0$ ならば $\mathbb{I}_A(J)=A_{n+1}(\Bbbk)_0$ がなりたつ。

$\operatorname{char}(\Bbbk)\neq 0$ ならば $\mathbb{I}_A(J)$ はかなり増えてしまう (命題 5.9).

教訓: 標数 p では微分は「切れの悪いナイフ」である。

そこで、標数 0 で subquotient を考えて、その解釈は標数 p でやるという、曲芸みたいなことをすることにする。つまり、ここでは 標数 0 の場合の環を mod p で考えていると想定することで、そのような場合でも $A_{n+1}(\Bbbk)_0/J$ を 「制限」の座標環として採用しよう。

6.5. **完備化.** 実は上記の $\mathbb{I}_A(J)/J$ は射影空間に埋め込める。非可換射影空間を改めて定義しようというのに既成品の射影空間を持ち出すのは変に思われるかもしれない。しかしここでは既成の射影空間を単に境界をつけてコンパクト化するために用いる。

他のどの元とも可換な C をとり、

$$[X_i, X_j] = 0 \quad , [\bar{X}_i, \bar{X}_j] = 0, \quad [\bar{X}_i, X_j] = \delta_{ij} C \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

という交換関係を考える。これを仮に CCRC と呼ぼう。

$$\tilde{A}^{(C)}_{n+1}(\Bbbk) = \Bbbk\langle X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n, C\rangle/\mathrm{CCRC}.$$

この代数にも、 $\mathrm{sdeg}(X_i) = 1$, $\mathrm{sdeg}(X_j) = -1$, $\mathrm{sdeg}(C) = 0$ なる符号付き次数が定まる。

$$A_{n;R}(\Bbbk) = \tilde{A}^{(C)}_{n+1}(\Bbbk)_0/(\sum_i X_i \bar{X}_i - RC)$$

補題 6.3. $\Bbbk$ は標数 $p \neq 0$ の体であるとする。

(1)
$$\Bbbk[X_0^p, X_1^p, \ldots X_n^p, \bar{X}_0^p, \bar{X}_1^p, \ldots \bar{X}_n^p, C^p]$$
は $\tilde{A}_{n+1}(\Bbbk)$ の中心に含まれる部分環で、$2n+3$ 変数の多項式環である。

(2) $A_{n;R}(\Bbbk)$ においては、
$$\sum_{i=0}^{n} X_i^p \bar{X}_i^p = (R^p - R)C^p$$
がなりたつ。

(3) とくに、$R^p - R \neq 0$ のとき、$A_{n;R}(\Bbbk)$ は
$$\Bbbk[\{X_i^p \bar{X}_j^p\}_{0 \leq i,j \leq n}]$$
上の graded algebra である。(この環は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の Segre embedding の射影座標環であることに注意。)

(4) $A_{n;R}(\Bbbk)$ は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{n;R}$ を定義する。

$\mathcal{A}_{n;R}$ は射影空間の非可換対応物であると考えられる。

6.6. **代数多様体に対応する non commutative scheme.** この小節の内容はまだ極めて実験的であることを白状しておく。

$\mathbb{P}^n$ の非特異部分多様体 S が与えられているとする。S の定義斉次イデアル I は $A_{n,R}$ の左イデアル J を定義する。したがって、$\mathcal{A}$ の 左イデアル $\mathfrak{J}$ を得られるが、

定義 6.4. S の非可環版として次のような対象を考える。

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}/\mathfrak{J})/(\bar{J})^p.$$

すくなくとも古典極限においては、この対象は S のシンプレクティック構造を与えるべきものである。

実は秋の学会のアブストラクトでは
conjecture: この対象は、conjugation に対する対称性など、代数多様体 S の非可換版としての素晴らしい性質を持つ。

という形で conjecture を述べたが、これは (予想通りというべきか) 十分ではなかった。

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}/\mathfrak{J})/(\bar{J})^p.$$

は確かに求めるべき量子的な対象の一つではあるが、全部ではないようだ。むしろそのような対象を全部考えて、その全体の挙動を記述するほうが大事であるというのが、現在の講演者の立ち位置である。

References

[1] A. Belov-Kanel and M. Kontsevich. Automorphisms of the Weyl algebra. Lett. Math. Phys, 74(2):181–199, 2005.

[2] A. Belov-Kanel and M. Kontsevich. The jacobian conjecture is stably equivalent to the dixmier conjecture. Mosc. Math. J., 349(2):209–218, 2007.

[3] Y. Tsuchimoto. Preliminaries on Dixmier conjecture. Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math., 24:43–59, 2003.

[4] Y. Tsuchimoto. Non commutative algebraic spaces of finite type over Dedekind domains. J. Math. Kyoto Univ., 46(3):553–582, 2006.

[5] 九後 汰一郎. ゲージ場の量子論 ⟨1⟩. 新物理学シリーズ. 培風館, 1989.