Non commutative complex varieties

Y.Tsuchimoto (Kochi Univ.)

March 26, 2017 11:35-11:50

重要な訂正:スタート地点に戻る:信用しないでください:

とにする。話を戻すと、Dolbealt 複体を考えるには「微分形式の全体のなす層」の非可換対応物を考えることになり、別の見方をすれば、super 代数の Marsden-Weinstein quotient の理論を考えると言ってもいいだろう。

それは実際うまく行って、super 代数の複体 A を作ることができる。A は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の層と見ることもできるし、$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の射影座標環上の加群に当たる次数付き環と見ることもできる。

通常の Dolbeault complex と同様に、A は正則微分 ∂、反正則微分 $\bar{\partial}$ をもつ二重複体である。とりあえず $A, \bar{\partial}$ について調べよう。Deligne-Illusie 理論と並行して次のことがわかることはすでに前回に紹介した。

定理 1. 微分が 0 であるような $(A, \bar{\partial})$ の *sub complex* A_{sparse} が存在して *(*具体的に書けて*)*, $(A, \bar{\partial})$ は $(A_{sparse}, 0)$ と *quasi-isomorphic* である。

$\mathbb{P}^n$ については次の結果も口頭発表の折紹介した。

定理 2. $R^i\Gamma(A, \bar{\partial})$ は 具体的に計算できる。*(cohomology* 環の同定*)*

$$H^\bullet(A, \bar{\partial}) \cong \Bbbk[\eta] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[L]$$

関係式*:*

$$\eta^2 = 0, \qquad L^{n+1} = 0.$$

$\Bbbk[L]$ は $\mathbb{P}^n$ の *cohomology* 環である*.*

今回はつぎの結果について詳しく説明したい。

定理 3. 非特異代数多様体 V に対し t*,* $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の層 A $V \times V$ に *(coherent sheaf* として*)* 引き戻したものを A_V と定義する。このとき、$R^i\Gamma(A_V, \bar{\partial})$ は定理 *2* と同様の形で具体的に計算できる。

詳細や参考文献については実際の口頭発表のほか発表者の web をご参照願いたい。

やりたいこと

射影代数多様体 V にたいして、それを「影」として持つような非可換多様体を考え、その「Dolbealt 複体」とそのコホモロジーを計算する。

$\mathbb{C}$ 上 $\to$ $\mathbb{Z}$ 上有限生成な環上 $\to$ 正標数 p の体上 $\to$非可換版 $\to$ $\mathbb{C}$ 上へ。
詳細は 「土基」「non-commutative」 で 検索
動画は dailymotion.com にあります。と言いたいところですが、今回は余裕がありません。すみません。

今までの道筋

ポイント:

1. Weyl 環 $\to$ (Marsden Weinstein quotient) $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$
2. その super 化を考える。
3. Weyl Clifford 環 $\to$ super Marsden-Weinstein quotient で "Dolbeault complex" を組み立てる。("複素" 理論)

Weyl Clifford 環の要点

1. 変数 X が一個増えるごとに $X, \bar{X}, \partial X, \bar{\partial}\bar{X}$ が存在。
2. $[\bar{X}, X] = hC$
3. $[\bar{\partial}X, \partial X] = hkC.$
4. $X, \bar{X}$ と "forms" $\partial X, \bar{\partial}X$ とは可換。

WC には "外微分" $\partial, \bar{\partial}$ が入る。

1. $\partial(\bar{\partial}X) = kX$
2. $\bar{\partial}(\partial X) = -k\partial X$

(注意:$[X, \bar{\partial}\bar{X}] = 0$ の両辺を ∂ で微分、

$$[\partial X, \bar{\partial}\bar{X}] + [X, \partial\bar{\partial}\bar{X}] = 0 \quad \therefore\ hkC + [X, \partial\bar{\partial}\bar{X}] = 0)$$

Marsden Weinstein quotient

$$\mu_k \stackrel{\text{def}}{=} k \sum_i X_i \bar{X}_i + \sum_i \partial X_i \bar{\partial} X_i - kC$$

$\mathbb{G}_m$-作用 (grading) に対応:

$$[\mu_k, F] = hkC(\mathrm{sdeg}\, F)F$$

k-torsion を除いた上で、

$$\begin{aligned} C &= \sum_i X_i \bar{X}_i + \frac{1}{k} \sum_i \partial X_i \bar{\partial} X_i \\ &= \sum_i X_i \bar{X}_i + m \end{aligned}$$

を課す。
$m = \frac{1}{k} \sum \partial X_i \bar{\partial} X_i$ を付け加えることで C を消去できる。

$\mathcal{A}$ の幾何学的実現

1. $(\pi_*\Omega_{\mathbb{A}_o^{n+1}} \boxtimes \pi_*\Omega_{\mathbb{A}_o^{n+1}}[m])^{\mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m}$ に新たな環の構造が入る。それが $\mathcal{A}$.
2. とくに、$\mathcal{A}$ の線形構造は $(\pi_*\Omega_{\mathbb{A}_o^{n+1}} \boxtimes \pi_*\Omega_{\mathbb{A}_o^{n+1}}[m])^{\mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m}$ と同じ。
3. $\bar\partial$ は、$\mathbb{A}^{n+1}\times\mathbb{A}^{n+1}$ のものから期待されるものとは少しだけ違う。
   - 3.1 $\bar\partial|_{\Omega_{\mathbb{P}^n}\cdot\bar\Omega_{\mathbb{P}^n}}$ は普通の $\bar\partial$ に一致。
   - 3.2 $\bar\partial(\partial\log(X_i)) = -k$.
   - 3.3 $\bar\partial(\bar\partial\log(\bar X_i)) = 0$.

粗く見ると:

1. 正標数 p では $\mathcal{A}$ は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の sheaf の積構造をひねったものに過ぎない。（ $\mathcal{O}^{(p)}$ 上の環の層である。）それぞれの射影成分 $\mathbb{P}^n$ に注目すれば単なる微分形式と外微分の理論である。）
2. p が大きくなるに従って、$\mathcal{O}^{(p)}$ からみた $\mathcal{A}$ のランクは大きくなる。
3. $p = 0$ においては、 $\mathcal{A}$ にあたる algebra のみが存在し、$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ は直接は見当たらない。

Deligne-Illusie 理論の類似?

$(\mathcal{A}, \bar{\partial})$ と quasi isomorphic な 「小さい」subcomplex を探したい。
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の dolbeault 複体

$$(\Omega \otimes \bar{\Omega}, \bar{\partial})$$

の quotient 複体

$$(\Omega \otimes \bar{\Omega}/(\omega), \bar{\partial})$$

と関連か? (ω: Fubini-Study metric に対応する form)

問題を端的に言うと

$\mathbb{A}^{2n}$ ($\mathbb{C}^n$ と思っても良い。) で

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dX_i d\bar{X}_i$$

という 2-形式を考える。このとき、複体 $((\Omega/\Omega\cdot\omega), \bar{\partial})$ の cohomology を求めよ。
cocycle

$$\{\alpha | \bar{\partial}\alpha = \omega\beta \qquad (\exists\beta \in \Omega)\}$$

coboundary

$$\bar{\partial}\Omega + \omega\Omega$$

Deligne-Illusie-Cartier 理論とマッチするか。

cohomology 環の同定にむけて

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, Ω に GL_n が作用し、$\mathcal{A}$ はそれについて対称性を持つ。
$\mathcal{A}$ の singular な部分は GL-不変。
このことから $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ の flatness が従うはず。

射影多様体についてどうするべきか

V:variety $\subset \mathbb{P}^n$ に対して、

$$A_V := A/(I_V^p, \bar{I}_V^p)$$

と定義する。
A はそれ自身の flat resolution と考えられるので、
A_V の cohomology を考えるのは比較的易しい。