非可換ケーラー多様体としての非可換射影多様体の様子について

Y.Tsuchimoto (Kochi Univ.)

September 18, 2016 15:30-15:45

やりたいこと

射影代数多様体 V にたいして、それを「影」として持つような非可換多様体を考え、その「Dolbealt 複体」とそのコホモロジーを計算する。

$\mathbb{C}$ 上 $\to$ $\mathbb{Z}$ 上有限生成な環上 $\to$ 正標数 p の体上 $\to$非可換版 $\to$ $\mathbb{C}$ 上へ。

詳細は 「土基」「non-commutative」 で $\boxed{\text{検索}}$

動画は dailymotion.com にあります。

Weyl/Clifford algebras

$\Bbbk$: commutative field.
The Weyl algebra:

$$\mathrm{Weyl}_{n+1}^{(h,C)} = \Bbbk[h, C, X_0, X_1, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n]/(CCR)$$

$$[\bar{X}_i, X_j] = hC\delta_{ij}, \quad [\bar{X}_i, \bar{X}_i] = 0, \quad [X_i, X_j] = 0. \tag{CCR}$$

C, h are both central.
Clifford algebra:

$$\mathrm{Cliff}_{n+1}^{(h,C,k)} = \Bbbk[h, C, k, E_0, \ldots, E_n, \bar{E}_0, \ldots, \bar{E}_n]/(CAR)$$

$$[\bar{E}_i, E_j]_+ = Chk\delta_{ij}, \quad [\bar{E}_i, \bar{E}_j]_+ = 0, \quad [E_i, E_j]_+ = 0. \tag{CAR}$$

Weyl-Clifford algebra

$$\mathrm{WC}_{n+1}^{(h,C,k)} = \mathrm{Weyl}_{n+1}^{(h,C)} \otimes_{\Bbbk[h,C]} \mathrm{Cliff}_{n+1}^{(h,C,k)}$$

外微分:

$$\partial : \begin{cases} X_i \mapsto E_i \\ \bar{X}_i \mapsto 0 \\ E_i \mapsto 0 \\ \bar{E}_i \mapsto k\bar{X}_i. \end{cases} \qquad \bar{\partial} : \begin{cases} X_i \mapsto 0 \\ \bar{X}_i \mapsto \bar{E}_i \\ E_i \mapsto -kX_i \\ \bar{E}_i \mapsto 0. \end{cases}$$

WC は $\mathbb{C}^n$ (を実多様体とみなしたもの) 上の微分形式全体の環の非可換版.

μ_R による Marsden-Weinstein quotient

$$\mu_R = k \sum_i X_i \bar{X}_i + \sum_i E_i \bar{E}_i - kRC.$$

$$[\mu_R, f] = \mathrm{sdeg}(f) \cdot f$$

$$A^{\mathrm{pre}} = (\mathrm{WC})_0 / (\mu_R).$$

$$A = A^{\mathrm{pre}} / (k\text{-torsions})$$

○ $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0 \implies (\mathrm{WC})_0 = (\mu_R$ の normalizer)
A は WC の Marsden-Weinstein quotient に当たる。
(cf. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \{v \in \mathbb{C}^{n+1}; ||v||^2 = R\}/S^1$.)
R: 半径の二乗.

仮定と訂正

$\boxed{\text{こっから } \mathrm{char}(\Bbbk) = p > 0 \text{ と仮定.}}$

R は general にとる。 つまり、

$$R \neq 0, \qquad \frac{h}{R} \notin \mathbb{F}_p^\times$$

となるようにとる。
そのためには $\Bbbk[h, \ldots]$ とあるところは、

$$\Bbbk[h, \frac{1}{R^p - Rh^{p-1}}, \ldots]$$

とすべきでした。訂正します。
怠惰ですみません。

A の影は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$

A の center: $\Bbbk[h, k, C, \{X_i^p \bar{X}_j^p\}]$.

$$C = \frac{1}{R}(\sum_i X_i \bar{X}_i) + \frac{1}{kR}(\sum_i E_i \bar{E}_i)$$

$\rightarrow C$ は消去可能

$$(1 - (\frac{h}{R})^{p-1}) C^p == \sum X_i^p \bar{X}_i^p$$

$\rightarrow C^p$ は $\underbrace{\{X_i^p \bar{X}_j^p\}}_{\substack{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \text{の} \\ \text{セグレ座標}}}$ を使えば消去可能

$\boxed{A \text{ は } \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \text{ 上の環の層と見ることができる。}}$

local calculation

$$U^{\heartsuit} = \{X_0 \neq 0\}(\cong \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^n)$$

で考える。(index i は $0, \ldots n$, index j は $1, \ldots n$ を動くものとする。)

$$A^{\heartsuit} = \Bbbk[k, h, C, x_j, x'_j, e_0, e'_0, e_j, e'_j, m]$$

$$R^{\heartsuit} = \Bbbk[k, h, C, x_j, x'_j, dx_j, \bar{\partial} x'_j]$$

$$R^{\heartsuit}_{\mathrm{sparse}} = \Bbbk[h, C, x_j, x'^p_j, dx_j, x'^{p-1}_j \bar{\partial} x'_j]$$

$$A^{\heartsuit} \supset R^{\heartsuit}_{\mathrm{sparse}} + R^{\heartsuit}_{\mathrm{sparse}} \cdot (e_0 RC - \varepsilon)$$

$$\varepsilon = \sum_i \bar{X}_i E_i$$

Theorem

$$A^{\heartsuit} = \Bbbk[k, h, C, x_j, x'_j, e_0, e'_0, e_j, e'_j, m]$$

$$R^{\heartsuit} = \Bbbk[k, h, C, x_j, x'_j, dx_j, \bar{\partial}x'_j]$$

$$R^{\heartsuit}_{\text{sparse}} = \Bbbk[h, C, x_j, x'^{p}_j, dx_j, x'^{p-1}_j \bar{\partial}x'_j]$$

$\boxed{\text{包含写像 } A^{\heartsuit} \supset R^{\heartsuit}_{\text{sparse}} + R^{\heartsuit}_{\text{sparse}} \cdot (e_0 RC - \varepsilon) \text{ は quasi-isom.}}$

Deligne-Illusie 理論の類似

$$\boxed{A^{\heartsuit} \supset \underbrace{R^{\heartsuit}_{\mathrm{sparse}} + R^{\heartsuit}_{\mathrm{sparse}} \cdot (e_0 RC - \varepsilon)}_{A^{\heartsuit}_{\mathrm{sparse}}} \text{ は quasi-isom.}}$$

$$(A, \bar{\partial}) \supset (A_{\mathrm{sparse}}, 0)$$

$$A_{\mathrm{sparse}} \cong \exists S \boxtimes \Omega^{\bullet}_{\mathrm{sparse}}$$

S は extension:

$$0 \to \Omega^{\bullet} \to S \to \Omega^{\bullet} \to 0$$

で、

$$H^{1,1} = H^1(\mathbb{P}^n, \Omega^1) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}, \Omega^1) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}^n}(\Omega^{\bullet}, \Omega^{\bullet})$$

において、$H^{1,1}$ の生成元に対応する.

cohomology 環の同定

$$H^\bullet(A, \bar{\partial}) \cong \Bbbk[\eta] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\Lambda]$$

関係式:

$$\eta^2 = 0, \qquad \Lambda^{n+1} = 0.$$

$\Bbbk[\Lambda]$ は $\mathbb{P}^n$ の cohomology 環.

射影多様体について期待される結果

V:variety $\subset \mathbb{P}^n$ に対して、

$$A_V := A/(I_V^p, \bar{I}_V^p)$$

と定義する。

$$A_V \underset{q.i}{\sim} A_{\mathrm{sparse},V}$$

$$A_{\mathrm{sparse},V} \cong S_V \boxtimes \Omega_{V,\mathrm{sparse}}$$

$$R^i\Gamma(A_{\mathrm{sparse},V}, \bar{\partial}) \cong H(S_V) \otimes H(V, \Omega)$$