

非可換代数幾何学の諸問題

1. AND BEYOND...

- 非結合代数の数学。
 - カッコを用いると文字列で表示可能。
- 和は必要か。
 - \mathbb{F}_1 数学の登場か?

問題 1.1. 各点で、算数の代わりに文字列の演算を行うような数学を構築せよ。 (“Project Houichi”).

問題 1.2. $\mathbb{F}_?$ と \mathbb{F}_1 との関係を明確にせよ。

2. 全ての数学は非可換版を持つ。

2.1. 特に近いと思われる数学.

2.1.1. 離散力学系に付随した非可換代数幾何学.

- ”時間発展” を二方向もつ。(力学系本来のものと Frobenius morphism)
- 母関数 (Zeta 関数) に工夫が必要。

問題 2.1. $f : X \rightarrow X$ が \mathbb{F}_q 上定義される力学系であるとき、Frob と f^* とを同時対角化して記述せよ。

問題 2.2. Let X be an irreducible affine scheme. For any proper Zariski closed subset Y of X , we have

$$\bigcup_n f_\varphi^{-n} Y(\bar{\mathbb{F}}_q) \subsetneq X(\bar{\mathbb{F}}_q).$$

2.1.2. D 加群、微分方程式. D 加群の理論は、Weyl 環の理論の発展とも考えられるので、もともと非可換代数幾何学で扱いやすい。が、(とくに正標数では) 基本的な微分方程式の解であるところの \exp などの扱いが問題である。

問題 2.3. $\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_u$ 上の解析学を完成させよ。

3. 根本問題

3.1. 非可換多様体.

問題 3.1. 非可換多様体を定義し、その一般論を展開せよ。

- 一番大きな容れもの(「空間」)として線形アーベル圏を採用。
- $\text{mod } p$ すれば「スキーム」(もしくは、代数空間)上の代数の層上の modules の圏になるようなものを「非可換スキーム(もしくは、非可換代数空間)」と呼ぶ。
- 正則性としては、 $\text{mod } p$ したときの Auslander 正則性を採用する。

一般に非可換多様体、とくにコンパクトかつ正則なもの、は「少ない」と考えられているようである。「不確定性原理」などを考慮するとやむを得ないところもあるかもしれない。しかし、抜け道があるような気がする。

問題 3.2. 非可換多様体は十分たくさんあるか?

3.1.1. 粒子の運動論. 古典粒子は多様体上の点(時空多様体上の世界線)で象徴される。

量子論では点は時空多様体上の「調和形式」で象徴される。(かなり無理があるが、ダランベルシアン(波動関数)の解という意味で。)

問題 3.3. 非可換多様体で粒子の運動論を展開せよ。

基本的に一粒子系という概念は心細く、ほぼ必然に無限多粒子系を扱う必要がある。

問題 3.4. 「無限多粒子系」を正しく制御せよ。

4. 応用。

4.1. **Jacobian conjecture, Dixmier conjecture.** まだ非可換代数幾何学からの寄与はありうると考える。

4.2. **Kähler 多様体論.** \mathbb{C} 上の projective, 及び affine 多様体は Kähler 多様体の構造を持つ。それらに対しては非可換版が存在する。

問題 4.1. 非可換 Kähler 多様体を一般的に定義せよ。

問題 4.2. $H^{k,l} \cong \bar{H}^{l,k}$ を正標数で実現せよ。

問題 4.3. Harmonic function は rational か?

5. そのうちに付けたいこと

超変数は大事だと言われており、ホモロジー代数学や、form のことを考えてもそれはうなずけるところがある。

問題 5.1. 超変数を付け加えた理論を作れ。derived category との関係などは自然と入ってくるだろうか?

5.1. **非可換環一元論.** スキームの貼り合わせ関数など、可換理論では別に用意したものが非可換理論では同列に組み込める場合がある。

問題 5.2. 可換なスキームの理論を非可換環一本で説明できるか?

5.2. **Conne III 型理論から.** III型理論では、非有限なフォンノイマン環の解析を、適当な接合積をとることで有限なフォンノイマン代数とその自己(準)同型を解析することに帰着する。現在の、標数 p に帰着する方法では「非有限」の代数を考察するのはそのままでは不可能である。

問題 5.3. 「非有限」な代数を「接合積」を用いて解析する方法を見い出せ。